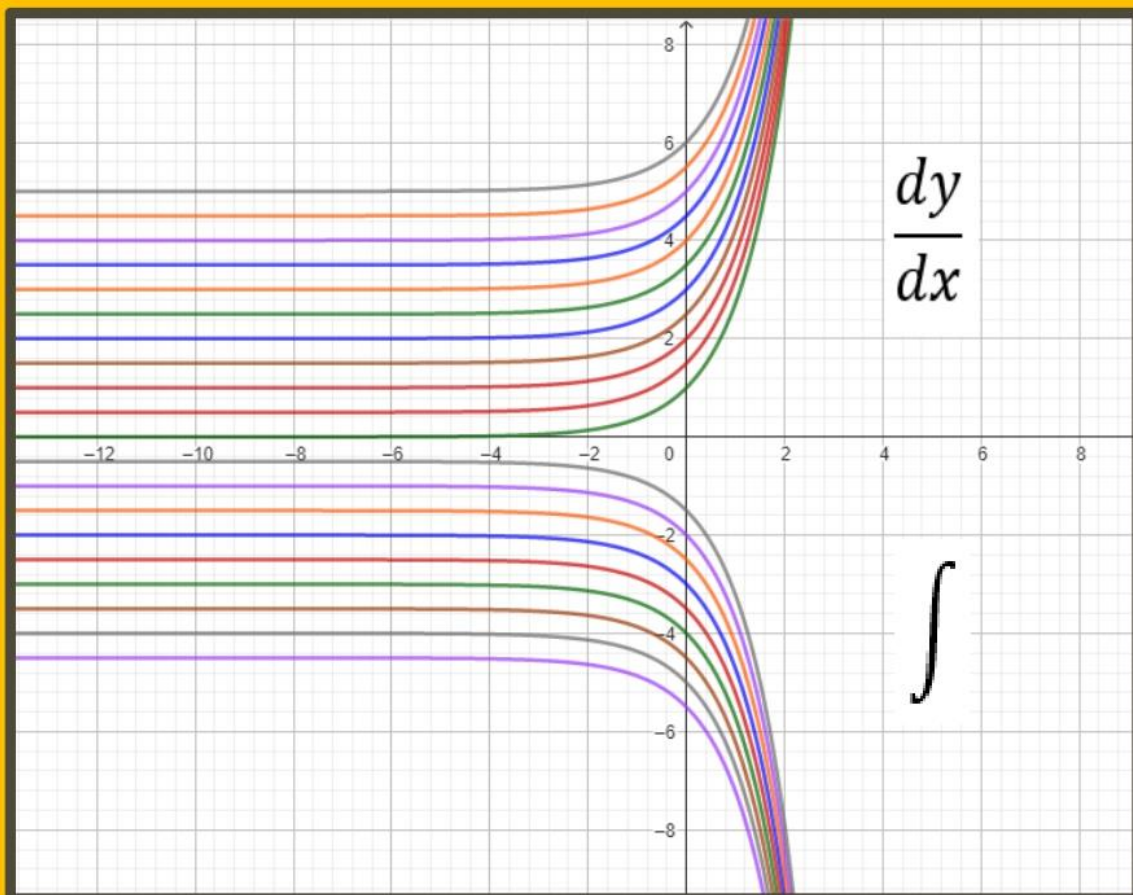


CLEBER DE OLIVEIRA DOS SANTOS



**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE
PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM
MODELAGEM MATEMÁTICA NA ÁREA DA FÍSICA**

CLEBER DE OLIVEIRA DOS SANTOS

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE
PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM
MODELAGEM MATEMÁTICA NA ÁREA DA FÍSICA**



**Capivari de Baixo
2023**

Editora Univinte – 2023.

Título: Equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem: modelagem matemática na área da física.

Autor: Cleber de Oliveira dos Santos.

Capa: Lorenzo de Oliveira Cardoso.

REVISÃO TÉCNICA: Dra. Diva Marília Flemming; Dr. Kelsner de Souza Kock; Me. Dalmo Gomes de Carvalho.

Editoração: Adriana Cardoso.

CONSELHO EDITORIAL
Expedito Michels – Presidente
Emillie Michels
Andreza dos Santos

Dr. Diego Passoni	Dra. Beatriz M. de Azevedo
Dr. José Antônio	Dra. Patrícia de Sá Freire
Dr. Nelson G. Casagrande	Dra. Solange Maria da Silva
Dra. Joana Dar’c de Souza	Dr. Paulo Cesar L. Esteves
Dr. Rodrigo Luvizotto	Dra. Adriana C. Pinto Vieira
Dr. Amilcar Boeing	Dr. Antônio Auresnedi Minghetti

S51s

Santos, Cleber de Oliveira dos.

Equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem modelagem matemática na área da física / Cleber de Oliveira dos Santos. Capivari de Baixo: Editora Univinte, 2023.

ISBN: 978-65-87169-54-5

1. Matemática. 2. Equações. I. Título.

CDD: 515.35

Catálogo na fonte por Andreza dos Santos – CRB 14/866

Editora Univinte – Avenida Nilton Augusto Sachetti, nº 500 – Santo André, Capivari de Baixo/SC. CEP 88790-000.

Todos os Direitos reservados. Proibidos a produção total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio.

A violação dos direitos de autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo art. 184 do Código Penal.



Editora

univinte

Publicado no Brasil – 2023.

APRESENTAÇÃO

Este livro é uma produção com base no trabalho de Conclusão do Curso de bacharel em Matemática. Apresenta problemas na área da física que necessitam de uma modelagem matemática. Uma possibilidade é realizar através das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem em situações reais. Vale ressaltar que a modelagem matemática dos problemas selecionados passará pelo menos por três etapas: construção do modelo, análise do modelo e comparação com experimentos ou observação (BOYCE; DIPRIMA, 2017).

As equações diferenciais têm relevância para diversas áreas, tais como: engenharias, biologia, química, economia, saúde, entre outras. É importante, “principalmente por causa da possibilidade de serem usadas para investigar uma variedade de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais” (BOYCE; DIPRIMA, 2017, p. 42).

Entretanto, o interesse do livro está voltado para a modelagem de problemas na área da física que envolvem equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem. Vamos apresentar algumas equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem sobre algumas condições iniciais que modelam problemas na área da física.

Parte-se da seguinte premissa, o livro é importante para os Cursos de Bacharel em Matemática, Engenharias, entre outros, sociedade e empresas. Em primeiro lugar, os cursos possuem as disciplinas de cálculo diferencial e integral no seu currículo. Além disso, alguns conteúdos de outras disciplinas necessitam das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem para resolver problemas reais aplicados em diversas áreas.

Ressaltamos, o livro apresenta a modelagem matemática de problemas através dos métodos de resoluções de equações diferenciais ordinárias. Percebe-se que as resoluções que serão apresentadas são de fácil adaptação. Assim, poderão auxiliar qualquer indivíduo no cálculo estimado do crescimento populacional de alguma cidade ou país. Ademais, poderá ajudar as empresas nos cálculos de problemas econômicos de investimentos que envolvem capitalização a juros compostos.

A motivação para realizar o livro parte do conteúdo sobre equações diferenciais das disciplinas de cálculo dos Cursos de Graduação em Ciências Exatas e Engenharia.

Ressalto a importância de organizar um material explicativo e didático para os estudantes e professores sobre equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem. Assim, acredita-se que será fundamental reunir o material de estudo sobre o tema neste livro.

Dessa forma, o objetivo geral é: apresentar equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem sobre algumas condições iniciais que modelam problemas na área da física, bem como propor algumas aplicações. E destaca-se como objetivos específicos: descrever alguns dos métodos de resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem; fazer a modelagem matemática dos problemas na área da física, tais como:

- (a) Leis de Newton e forças resistivas;
- (b) Oscilações;
- (c) Térmica;
- (d) Eletricidade;
- (e) Física Nuclear;
- (f) Hidrodinâmica;

Além disso, aplicar a solução geral com algumas condições iniciais.

Para alcançar os objetivos propostos, o livro está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica sobre alguns métodos de resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e segunda ordem. No segundo, a modelagem matemática na área da física. No terceiro, descrevem-se os problemas aplicados na área da física. Por fim, apresentam-se as considerações finais.

SUMÁRIO

1 CONCEITOS PRELIMINARES.....	7
1.1 DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA (EDO)	7
1.2 DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL (EDP).....	7
1.3 ORDEM.....	8
1.4 GRAU.....	8
1.5 SOLUÇÃO DE UMA EDO.....	8
2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM.....	9
2.1 MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	9
2.2 MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE.....	9
2.3 SOLUÇÃO.....	10
3 MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM.....	11
3.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAIS HOMOGÊNEAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES.....	11
3.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM LINEARES COM OS COEFICIENTES INDETERMINADOS.....	12
4 NOÇÕES BÁSICAS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES.....	13
4.1 REDUÇÃO DE ORDEM	13
4.2 DEFINIÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM.....	14
4.3 DEFINIÇÃO DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM	14
4.4 CONDIÇÕES INICIAIS DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM	15
5 MODELAGEM MATEMÁTICA NA ÁREA DA FÍSICA	17
5.1 LEIS DE NEWTON E FORÇAS RESISTIVAS.....	17
5.1.1 PRIMEIRA LEI DE NEWTON	17

5.1.2 SEGUNDA LEI DE NEWTON	17
5.1.3 TERCEIRA LEI DE NEWTON	18
5.1.4 RESISTÊNCIA DE UM FLUÍDO.....	19
5.2 <i>QUEDA LIVRE</i>	20
5.2.1 ASSÍNTOTA HORIZONTAL DE $v(t)$	23
5.3.1 SISTEMA MASSA-MOLA	24
5.3.2 PÊNDULO SIMPLES.....	25
5.3.3 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO SIMPLES	27
5.3.4 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES	29
5.3.5 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO E FORÇADO	30
5.3.6 SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR.....	32
5.4.1 LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON.....	34
5.5 <i>ELETRICIDADE</i>	36
5.5.1 CIRCUITOS EM SÉRIE RLC.....	36
5.6 <i>FÍSICA NUCLEAR</i>	39
5.6.1 DECAIMENTO RADIOATIVO	39
5.7 <i>HIDRODINÂMICA</i>	40
5.7.1 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE.....	40
6 APLICAÇÕES	40
6.1 <i>QUEDA LIVRE</i>	40
6.2 <i>LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON</i>	43
6.4 <i>CIRCUITO RL</i>	47
6.5 <i>CIRCUITO RC</i>	48
6.6 <i>HIDRODINÂMICA</i>	49
6.7 <i>OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO SIMPLES</i>	54
6.8 <i>SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR</i>	56
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
REFERÊNCIAS	65

1 CONCEITOS PRELIMINARES

1.1 DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA (EDO)

Uma EDO de acordo com os autores Bronson e Costa (2008), Simmons (2009); Kreyszig (2019), é uma função desconhecida que tem somente uma variável independente, de modo que todas as derivadas que ocorrem nela são derivadas ordinárias. Compartilhando a mesma concepção para definir uma EDO, Boyce e Diprima (2017, p. 16), afirma: “a função desconhecida depende de uma única variável independente”. A título de explicação, segue o exemplo do autor da página 16: *equação do circuito elétrico RCL*.

$$L \cdot \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t).$$

1.2 DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL (EDP)

Uma EDP de acordo com Bronson e Costa (2008), Simmons (2009), Kreyszig (2019), uma EDP é uma função qualquer que depende de duas ou mais variáveis independentes, de modo que as derivadas que ocorrem são parciais. Compartilhando a mesma concepção para definir uma EDP, Boyce e Diprima (2017, p. 16), afirma: “a função desconhecida depende de diversas variáveis independente”. Além disso, suas derivadas são derivadas parciais. A título de explicação, segue os exemplos do autor das páginas 16 e 17.

(a) equação do calor: $\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$.

(b) equação de onda: $\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$.

Capítulo 1

1.3 ORDEM

A ordem de uma equação diferencial para os autores, Bronson e Costa (2008), Zill (2009), Simmons (2009), Boyce e Diprima (2017) e Kreyszig (2019) é dada pela ordem da maior derivada.

1.4 GRAU

O grau de uma equação diferencial para os autores, Bronson e Costa (2008), Zill (2009), Simmons (2009), Boyce e Diprima (2017) e Kreyszig (2019) é dado pelo valor do expoente da maior derivada da função. Além disso, uma EDO de ordem n é escrita na forma geral como: $a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = g(t)$. Ou também: $a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t)$. Caso $g(t) = 0$ a EDO é chamada de EDO homogênea.

Para os autores, Bronson e Costa (2008), Zill (2009), Simmons (2009), Boyce e Diprima (2017) e Kreyszig (2019), uma EDO linear pode ser escrita como: $F(t, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$. Sendo F uma função linear das variáveis $(t, y, y', y'', \dots, y^n)$. Uma equação que não é escrita como a equação acima é chamada de não linear (BRONSON; COSTA 2008, ZILL 2009, SIMMONS 2009, BOYCE; DIPRIMA, 2017,).

1.5 SOLUÇÃO DE UMA EDO

Para os autores Boyce e Diprima (2017) e Kreyszig (2019), uma solução da EDO $F(t, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$, no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. É uma função: $y = \Phi(t)$, tal que:

$$F(t, \Phi(t), \Phi(t)', \Phi(t)'', \dots, \Phi(t)^{n-1}, \Phi(t)^n) = 0, \forall t \in I.$$

2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

2.1 MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Considere a equação diferencial de primeira ordem a seguir:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Multiplicando ambos os membros pela diferencial dx , onde $dx \neq 0$, temos:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Onde, $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções envolvendo as variáveis x e y .

De acordo com (BOYCE; DIPRIMA, 2017), equações desse tipo é chamada de separável. Para esse tipo de equação, podemos juntar todos os termos contendo x com dx e todos os termos contendo y com dy . Em seguida, chegamos na solução através de integração.

A título de explicação do método de separação de variáveis, descrevemos os passos a seguir:

- (a) Escreva a equação diferencial na forma: $M(x)dx = -N(y)dy$.
- (b) Integre ambos os membros da equação: $\int M(x)dx = -\int N(y)dy + C$.
- (c) Por fim, isole y .

2.2 MÉTODO DO FATOR INTEGRANTE

De acordo com Boyce e Diprima (2017), uma equação de primeira ordem linear pode ser escrita como:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Se a função $q(x) = 0$, dizemos que é uma EDO de primeira ordem linear homogênea, caso contrário, linear não homogênea.

Capítulo 2

Para Kreyszig (2019), um fator integrante de uma EDO é uma função $\mu(x, y)$ tal que a multiplicação da equação por $\mu(x, y)$ fornece uma equação em que cada membro pode ser identificado como uma derivada com relação a x .

2.3 SOLUÇÃO

De início, vamos procurar um fator integrante que seja somente em função de x .

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = q(x) \cdot \mu(x).$$

Agora, vamos querer que o lado esquerdo seja a derivada do produto $\mu(x)y$.

Assim: $\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x) \frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx} \cdot y.$

Fazendo a comparação termo a termo, o fator integrante, caso exista, deverá satisfazer:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x) \cdot p(x).$$

Resolvendo a equação pelo método das variáveis separáveis, temos:

$$\int \frac{1}{\mu} d\mu = \int p(x) dx.$$

Logo, a função $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ é um fator integrante da EDO. Multiplicando a equação por $(x) = e^{\int p(x) dx}$, temos:

$$e^{\int p(x) dx} \cdot \frac{dy}{dx} + e^{\int p(x) dx} p(x)y = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x)$$

$$e^{\int p(x) dx} \cdot \left(\frac{dy}{dx} + p(x)y \right) = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x).$$

Integrando em relação a x , temos: $e^{\int p(x) dx} y = \int (q(x)e^{\int p(x) dx}) dx + C.$

Assim, temos: $y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x) dx}} \cdot \int (q(x)e^{\int p(x) dx} + C) dx.$

A equação acima é a solução da EDO: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$

3 MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

3.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAIS HOMOGÊNEAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

De acordo com Bronson e Costa (2008), uma equação diferencial de segunda ordem é do tipo:

$$ay'' + by' + cy = g(t).$$

Onde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $g(t)$ é função de t e $y(t)$ é a solução. Se $g(t) = 0, \forall t$, a equação diz-se homogênea. Caso contrário, a equação chama-se não homogênea. Assim, a equação homogênea é dada por: $ay'' + by' + cy = 0$.

Teorema 1: Se y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea, então $y(t) = c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, onde c_1 e c_2 são constantes.

Substituindo y'' por λ^2 , y' por λ e y por 1, respectivamente a equação característica é dada por: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. A seguir, estudamos três casos para Δ .

Caso 1. Se $\Delta > 0$, temos duas raízes reais e distintas.

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Então, $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ são soluções. Pelo Teorema, a solução geral é dada por: $y(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$, onde c_1 e c_2 são constantes.

Caso 2. Se $\Delta = 0$, temos uma única raiz real.

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\lambda = \frac{-b}{2a}$$

A solução geral é dada por: $y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2e^{\lambda t}$, onde c_1 e c_2 são constantes.

Caso 3. Se $\Delta < 0$, não temos raiz real.

$$b^2 - 4ac < 0$$

Capítulo 3

$$\lambda_1 = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A solução geral é dada por: $y(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot [c_1 \cos(\lambda_2 t) + c_2 \cos(\lambda_2 t)]$, onde c_1 e c_2 são constantes.

3.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM LINEARES COM OS COEFICIENTES INDETERMINADOS

De acordo com Bronson e Costa (2008), considere a equação diferencial de segunda ordem: $ay'' + by' + cy = g(t)$.

Onde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $g(t)$ é função de t e $y(t)$ é a solução. Se $g(t) \neq 0, \forall t$, a equação diz-se não homogênea.

Teorema 2: A solução geral da equação não homogênea é dada por: $y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y(t)$, em que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e $Y(t)$ é alguma solução específica da equação homogênea.

De acordo com o Teorema (2), devemos encontrar: $y_h(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, ou seja, a solução da equação homogênea. Em seguida, encontrar: $y_p = Y(t)$, encontrar a solução particular da equação não homogênea. Par tal, consideramos uma hipótese inicial no modelo da solução particular com os coeficientes indeterminados.

Assim, calculando a derivada de 1ª e 2ª ordem na equação, devemos encontrar os coeficientes. Caso contrário, a hipótese inicial será falsa e devemos adotar outra hipótese para determinar os coeficientes.

4 NOÇÕES BÁSICAS DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

4.1 REDUÇÃO DE ORDEM

Para reduzir uma EDO de ordem n a um sistema de n equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem primeiramente é necessário “considerar uma equação diferencial ordinária linear de ordem n na sua forma padrão” (SANTOS, 2022, p. 33).

$$y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t)$$

Dadas às condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_{n-1}$$

Considere: $x_1 = y, x_2 = y', x_3 = y'' \dots, x_{n-1} = y^{n-2}, x_n = y^{n-1}$, assim, podemos transformar a EDO acima no sistema de n equações diferenciais de primeira ordem.

Segue de imediato que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = x_2 \\ x_2'(t) = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n \\ x_n'(t) = -a_n(t)x_1 - \dots - a_1(t)x_n + f(t) \end{array} \right.$$

Assim, temos as seguintes condições iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t_0) = y_0 \\ x_2(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1}(t_0) = y_{n-2} \\ x_n(t_0) = y_{n-1} \end{array} \right.$$

Assim, “resolver uma equação diferencial ordinária de ordem n equivale a resolver um sistema de n equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem” (SANTOS, 2022, p. 34).

Capítulo 4

4.2 DEFINIÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Considere $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e o sistema na forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Se $t \in I$, “é chamado de sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Se todas as funções f_1, f_2, \dots, f_n , forem identicamente nulas no intervalo I , dizemos que o sistema é homogêneo; caso contrário, ele é não homogêneo” (SANTOS, 2022, p. 24).

4.3 DEFINIÇÃO DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

De acordo com Santos (2022), funções do tipo: $x_1 = \Phi_1(t), x_2 = \Phi_2(t), \dots, x_{n-1} = \Phi_{n-1}(t), x_n = \Phi_n(t)$, formam uma solução do sistema no intervalo I se:

- (i) São diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I .
- (ii) Satisfazem o sistema para todo $t \in I$.

Capítulo 4

4.4 CONDIÇÕES INICIAIS DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Para Santos (2022), um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem pode ter n condições iniciais da forma:

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0.$$

Onde, $t_0 \in I$ e $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ são números reais.

As equações do sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem escrito na página anterior e as condições iniciais acima, “formam um problema de valor inicial (PVI)” (SANTOS 2022, p. 24).

4.5 FORMA MATRICIAL DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

De acordo com Santos (2022), um sistema de equações diferenciais de primeira ordem pode ser escrito na forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \forall t \in I.$$

Também poderá ser escrito como:

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) + F(t), \forall t \in I.$$

$$\text{Onde, } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} \text{ e } F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \text{ (SANTOS, 2022).}$$

Capítulo 4

Ademais, podemos escrever o sistema de equações diferenciais acima com condições iniciais na forma:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t).X(t) + F(t), & \forall t \in I \\ X(0) = X_0 \end{cases}.$$

Sendo: $X_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^0 \end{bmatrix}$.

Considerando $X'(t) = A(t).X(t) + F(t)$, se $F(t) = 0$, temos o seguinte sistema homogêneo: $X'(t) = A(t).X(t), \forall t \in I$.

4.6 SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM AUTÔNOMO E NÃO AUTÔNOMO

Vamos considerar o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem abaixo.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y' = g(x, y) \end{cases}$$

O sistema acima é dito autônomo, se as funções f e g não dependem do tempo. Caso contrário se $f = f(x, y, t)$ ou $g = g(x, y, t)$ o sistema é dito não autônomo.

Para Ferrara e Prado (1995), uma EDO não autônoma pode ser reduzida a um sistema autônomo acrescentando dimensão no sistema. Portanto, consideramos o tempo como uma variável adicional, isto é: $t = z$ tal que $\frac{dz}{dt} = 1$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z) \\ y' = g(x, y, z) \\ z' = 1 \end{cases}$$

Analogamente, uma ou mais EDO de primeira ordem pode ser transformada em duas (ou mais) EDO de primeira ordem.

5 MODELAGEM MATEMÁTICA NA ÁREA DA FÍSICA

5.1 LEIS DE NEWTON E FORÇAS RESISTIVAS

5.1.1 PRIMEIRA LEI DE NEWTON

Consideramos um corpo qualquer em repouso, se nenhuma força resultante atua sobre ele, ficará em repouso. Entretanto, o que acontece quando um corpo qualquer está em movimento e a força resultante que nele atua é nula? A resposta é dada por Young e Freedman (2016, p. 115), quando anuncia a primeira lei de Newton: *“quando a força resultante sobre um corpo é igual a zero, ele se move com velocidade constante (que pode ser nula) e aceleração nula”*.

5.1.2 SEGUNDA LEI DE NEWTON

Consideramos um corpo qualquer em movimento, aplicamos uma força horizontal constante na mesma direção e sentido em que ele se move. Assim, a soma das forças será constante e ele se deslocará no mesmo sentido e direção horizontal da velocidade.

Dessa forma, enquanto a força está atuando sobre o corpo a taxa da variação da velocidade é constante, isto é, o corpo se move com aceleração constante. Portanto, o módulo da velocidade do corpo aumenta, de modo que a aceleração ocorre na mesma direção e sentido da velocidade e da soma das forças (YOUNG, FREEDMAN, 2016).

Agora, invertendo o sentido da força sobre o corpo, de modo que a soma das forças atua em oposição à velocidade. Nesse caso, o corpo também possui uma aceleração, ele se move cada vez mais lentamente à direita, pois a aceleração neste caso é para a esquerda, na mesma direção da soma das forças.

Entretanto, possui sentido contrário. Nos dois casos, a experiência mostra que a aceleração será constante se a soma das forças for constante. Portanto, concluímos que

Capítulo 5

uma força resultante que atua sobre um corpo faz com que ele acelere na mesma direção e sentido da força.

Se o módulo da força resultante for constante o módulo da aceleração também será. Além disso, se o módulo da força resultante variar, a aceleração varia com a mesma proporção. Se a força resultante dobrar, a aceleração dobrará, se a força resultante reduzir pela metade, a aceleração também se reduz à metade e assim por diante.

Desse modo, para qualquer objeto, o módulo da aceleração é diretamente proporcional ao módulo da força resultante que atua sobre o corpo (YOUNG, FREEDMAN, 2016). Ou seja,

$$|\Sigma \vec{F}| = m \cdot |a|$$

Portanto, de acordo com os autores Young e Freedman (2016, p. 122), *“quando uma força resultante externa atua sobre um corpo, ele se acelera. A aceleração possui a mesma direção e o mesmo sentido da força resultante. O vetor força resultante é igual ao produto da massa do corpo pelo vetor aceleração do corpo”*.

5.1.3 TERCEIRA LEI DE NEWTON

A terceira lei de Newton resulta da interação entre dois corpos. Por exemplo, ao chutar uma bola, ela move-se para frente em sua trajetória, porque a força que seu pé exerce sobre ela é para frente, mas você sente a força da bola exercer em seu pé.

Portanto, a força que você exerce sobre o corpo é igual e contrária à força que o corpo exerce sobre você. Essa experiência, mostra que na interação entre dois corpos, as duas forças da interação possuem sempre o mesmo módulo e a direção, porém com sentidos contrários (YOUNG, FREEDMAN, 2016).

Portanto, enunciamos a terceira lei de Newton: *“Quando um corpo A exerce uma força sobre um corpo B (uma “ação”), o corpo B exerce uma força sobre o corpo A (uma “reação”). Essas duas forças têm o mesmo módulo e a mesma direção, mas possuem sentidos opostos. Essas duas forças atuam em corpos diferentes”* (YOUNG, FREEDMAN, 2016, p.128).

Capítulo 5

5.1.4 RESISTÊNCIA DE UM FLUÍDO

Ao colocar a mão para fora da janela de um carro que se move com alta velocidade percebemos a existência da resistência de um fluido, a força de um fluido, um gás ou um líquido exerce sobre o corpo que se move através dele. O corpo que se move exerce uma força sobre o líquido para afastá-lo de seu trajeto. Pela terceira lei de Newton, o fluido exerce sobre o corpo uma força igual e contrária (YOUNG, FREEDMAN, 2016).

A força da resistência de um fluido possui direção e sentido sempre contrários ao da velocidade do corpo em relação ao fluido. O módulo da força da resistência de um fluido normalmente cresce com a velocidade do corpo através do fluido. Para pequenos objetos movendo-se em baixas velocidades, o módulo f da força da resistência de um fluido é aproximadamente proporcional à velocidade do corpo v (YOUNG, FREEDMAN, 2016).

Assim, $f = kv$ (resistência de um fluido para baixas velocidades). Onde, k é um fator de proporcionalidade que depende da forma e do tamanho do corpo e das propriedades do fluido a equação acima é apropriada para as partículas de poeira caindo no ar ou um rolamento caindo no óleo.

Entretanto, quando o movimento ocorre no ar na velocidade de uma bola de futebol lançada do escanteio para a grande área ou em altas em velocidades, a força é aproximadamente proporcional a v^2 .

Então, chamamos de força de arraste do ar. Aviões, carros e ciclistas, entre outros, todos sofrem a ação do arraste do ar (YOUNG, FREEDMAN, 2016). Assim, a equação anterior deve ser substituída por: $f = Dv^2$ (resistência de um fluido para altas velocidades).

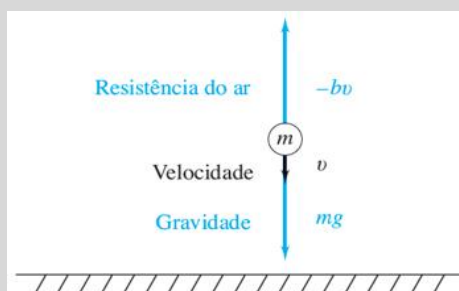
A força de arraste do ar cresce rapidamente, pois depende de v^2 . Em baixas velocidades, o arraste do ar sobre um automóvel é desprezível, porém é comparável ou maior que a resistência do rolamento quando o carro atinge a velocidade máxima permitida para uma rodovia. O valor de D depende da forma e do tamanho do corpo e da densidade do ar. As unidades da constante k na equação primeira equação são: $N.s/m$ ou kg/s e as unidades para a constante D na equação segunda equação são: $N.s^2/m^2$ ou kg/m (YOUNG, FREEDMAN, 2016).

Capítulo 5

5.2 QUEDA LIVRE

Considere um corpo de massa m com uma velocidade inicial v_0 caindo verticalmente em direção a superfície da terra. Supondo que a força da gravidade é constante e que a força de resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto, determine as equações da velocidade v e do movimento em função do tempo t .

Figura 1 – Forças atuando sobre um corpo em queda

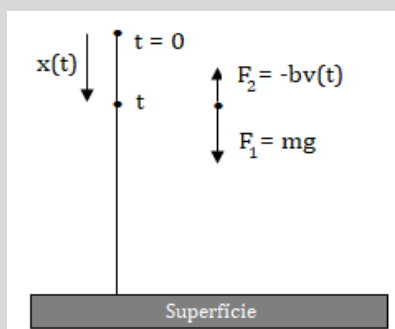


Fonte: Nagle; Saff; Snider (2012, p. 27).

Na figura 1, temos duas forças atuando no corpo, uma constante devido a aceleração da gravidade e outra causada pela resistência do ar. Essa última, proporcional à velocidade do corpo que age em oposição ao movimento do corpo (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012).

Assim, considerando o movimento no eixo vertical, conforme figura 2, determinamos como origem o ponto onde o corpo foi abandonado no instante $t = 0$. Além disso, consideramos $x(t)$ como a distância que o corpo caiu no instante t (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012).

Figura 2 – Posição inicial no instante $t = 0$ com as duas forças atuando sobre um corpo em queda



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

Aplicando a 2ª lei de Newton, temos:

$$F = m \cdot a.$$

Capítulo 5

Considere a equação a seguir como um modelo matemático:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - bv.$$

Para modelagem matemática, vamos considerar o método de separação de variáveis. Multiplicando por dt e dividindo por m . $(mg - bv) \neq 0$, ambos os membros da equação, temos:

$$\frac{dv}{(mg - bv)} = \frac{dt}{m}.$$

Integrando ambos os membros:

$$\int \frac{dv}{(mg - bv)} = \int \frac{dt}{m}$$

$$u = mg - bv$$

$$du = -bdv$$

$$dv = -\frac{du}{b}$$

$$\int \frac{-\frac{du}{b}}{u} = \frac{1}{m} \int dt$$

$$-\frac{1}{b} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{m} \int dt$$

$$-\frac{1}{b} \ln(mg - bv) = \frac{t}{m} + c$$

$$\ln(mg - bv) = -\frac{bt}{m} - bc$$

Usando a definição de logaritmos:

$$mg - bv = e^{-\frac{bt}{m} - bc}$$

Aplicando as propriedades das potências:

$$mg - bv = e^{-\frac{bt}{m}} \cdot e^{-bc}$$

Fazendo: $e^{-bc} = c_1$, temos:

$$mg - bv = c_1 e^{-\frac{bt}{m}}$$

Isolando v :

$$-bv = -mg + c_1 e^{-\frac{bt}{m}}$$

Multiplicando ambos os membros por (-1) , temos:

$$bv = mg - c_1 e^{-\frac{bt}{m}}$$

Capítulo 5

$$v = \frac{1}{b}mg - \frac{c_1}{b}e^{-\frac{bt}{m}}$$

$$v(t) = \frac{1}{b}mg - \frac{c_1}{b}e^{-\frac{bt}{m}}$$

A equação acima é a solução geral com a constante arbitrária c_1 . Em casos particulares, dados os valores de m , g e b e a velocidade inicial $v(0)$ podemos calcular o valor da constante c_1 na solução geral.

O problema de valor inicial é dado por:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg - bv \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Assim, substituindo $v = v_0$ e $t = 0$ na solução geral, temos:

$$v_0 = \frac{1}{b}mg - \frac{c_1}{b}e^{-\frac{b \cdot 0}{m}}$$

$$v_0 = \frac{1}{b}mg - \frac{c_1}{b}e^0$$

$$v_0 = \frac{1}{b}mg - \frac{c_1}{b}$$

$$v_0 - \frac{1}{b}mg = -\frac{c_1}{b}$$

$$-bv_0 + mg = c_1.$$

Portanto, a solução para o problema de valor inicial é dada por:

$$v(t) = \frac{1}{b}mg - \frac{(-bv_0 + mg)}{b}e^{-\frac{bt}{m}}$$

$$v(t) = \frac{1}{b}mg + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{bt}{m}}.$$

Agora, consideramos $x = 0$ quando $t = 0$. Dessa forma, vamos determinar a equação do movimento do corpo integrando a equação da velocidade em função do tempo. Sendo que $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Assim, temos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{b}mg + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{bt}{m}}$$

$$dx = \left[\frac{1}{b}mg + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{bt}{m}}\right] dt$$

Integrando os dois membros da equação, temos:

$$\int dx = \int \left[\frac{1}{b}mg + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{bt}{m}}\right] dt$$

$$x(t) = \int \frac{mg}{b} dt + \int v_0 e^{-\frac{bt}{m}} dt + \int -\frac{mg}{b} e^{-\frac{bt}{m}} dt$$

Capítulo 5

$$x(t) = \frac{mg}{b} \int dt + v_0 \int e^{-\frac{bt}{m}} dt - \frac{mg}{b} \int e^{-\frac{bt}{m}} dt$$

$$u = -\frac{bt}{m}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{b}{m}$$

$$dt = -\frac{m}{b} du$$

$$x(t) = \frac{mg}{b} \int dt - v_0 \frac{m}{b} \int e^u du - \frac{mg}{b} \cdot \left(-\frac{m}{b}\right) \int e^u dt$$

$$x(t) = \frac{mg}{b} t - v_0 \frac{m}{b} e^{-\frac{bt}{m}} + \frac{m^2 g}{b^2} e^{-\frac{bt}{m}} + c$$

$$x(t) = \frac{mg}{b} t - \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{bt}{m}} + c.$$

Se $x(0) = 0$ quando $t = 0$, temos:

$$0 = -\frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + c$$

$$c = \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right).$$

Portanto, a equação do movimento do corpo é dada por:

$$x(t) = \frac{mg}{b} t - \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{bt}{m}} + \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)$$

$$x(t) = \frac{mg}{b} t + \frac{m}{b} \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right).$$

5.2.1 ASSÍNTOTA HORIZONTAL DE $v(t)$

Para calcular a assíntota horizontal de $v(t)$ calculamos o limite da função quando $t \rightarrow +\infty$. Assim, temos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} mg + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{bt}{m}} = \frac{mg}{b}.$$

A velocidade $v(t)$ se aproxima da assíntota horizontal $v = \frac{mg}{b}$ quando $t \rightarrow +\infty$.

O valor de $\frac{mg}{b}$ é chamado de velocidade limite ou terminal do corpo (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012).

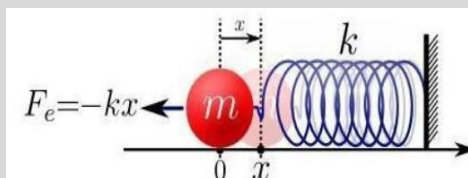
Capítulo 5

5.3 OSCILAÇÕES

5.3.1 SISTEMA MASSA-MOLA

Vamos considerar um corpo de massa m preso a uma das extremidades de uma mola horizontal cuja outra extremidade está fixa, conforme a figura 3, na página seguinte. O sistema possui um ponto de equilíbrio onde definimos a origem do sistema de coordenadas.

Figura 3 – Corpo preso à mola



Fonte: <https://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/sourceforge/pngtest.php>.

Segundo a Lei de Hooke, ao empurrarmos o corpo preso à mola até uma posição $x > 0$ surge uma força restauradora proporcional à distância em relação ao ponto de equilíbrio e no sentido contrário do deslocamento, $F_e = -kx$, que tenta trazê-lo de volta para a situação inicial. À medida que afastamos o corpo de massa m da posição de equilíbrio, a intensidade da força restauradora vai aumentando. Se puxarmos o corpo de massa m para a esquerda da posição $x_0 = 0$, uma força de sentido contrário e proporcional ao deslocamento x surgirá tentando mantê-lo na posição de equilíbrio (SANTOS, 2022).

A constante da mola k é uma propriedade não variável que depende do tipo de material empregado na confecção desta mola, bem como das dimensões utilizadas. Essa propriedade classifica as molas de acordo com a maior ou menor capacidade de deformação quando submetida a forças em suas extremidades. A unidade no SI da constante k é $\frac{N}{m}$ (HALLIDAY, RESNICK, 2015).

Na sequência, anunciamos a segunda lei de Newton: “A força resultante que atua sobre um corpo é igual à taxa de variação do momento deste corpo em relação ao tempo, ou, para uma massa constante, $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$, onde F é a força resultante que atua sobre o

Capítulo 5

corpo e v é a velocidade do corpo, ambas no instante de tempo t (SANTOS 2022, p. 50). A unidade no SI da força é N (Newton) da massa é Kg e aceleração $\frac{m}{s^2}$.

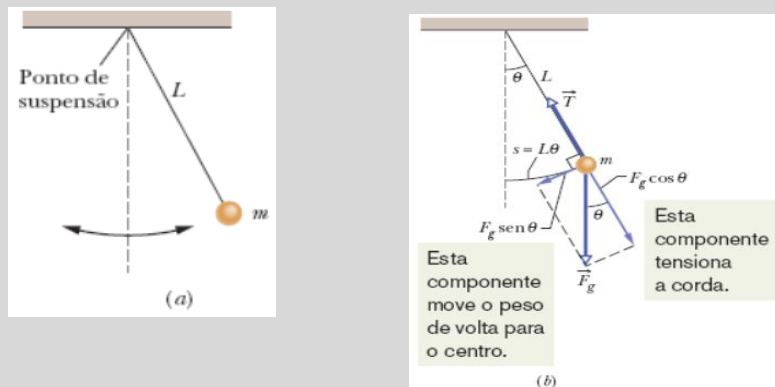
Se as forças de atrito, tanto entre as superfícies de contato como do meio externo (resistência do ar) forem desprezadas, F_e será a única força atuando sobre o sistema, logo, pela Segunda Lei de Newton, $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, ou seja, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$.

A equação diferencial de segunda ordem acima, descreve o movimento do corpo preso à mola. De acordo com Boyce e Diprima (2017), a solução para a equação diferencial é dada por:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

5.3.2 PÊNDULO SIMPLES

Figura 4: Pêndulo simples



Fonte: Halliday e Resnick (2022, p. 79).

De acordo com Halliday e Resnick (2022): Em (a), temos um pêndulo simples, em (b) as forças que agem sobre o peso são a força gravitacional \vec{F}_g e a tensão \vec{T} do fio. A componente tangencial $\vec{F}_g \cdot \sin \theta$ da força gravitacional é a força restauradora que tende a levar o pêndulo de volta para a posição central.

Para modelar a EDO que descreve o movimento do pêndulo simples, temos:

τ : torque

I : momento de inércia do pêndulo

α : aceleração angular

Capítulo 5

L: comprimento do fio inextensível

F_g : força gravitacional

m: massa

ω : velocidade angular

θ : ângulo que o fio faz com a vertical

$$\sum \tau = I \cdot \alpha$$

$$\tau = -L \cdot [F_g \cdot \text{sen}(\theta)]$$

$$\tau = -L \cdot m \cdot g \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$I = m \cdot L^2$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\alpha(t) = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

$$-L \cdot m \cdot g \cdot \text{sen}(\theta) = m \cdot L^2 \alpha$$

$$-g \cdot \text{sen}(\theta) = L \cdot \alpha$$

$$-g \cdot \text{sen}(\theta) = L \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g \cdot \text{sen}(\theta)}{L} = 0$$

A EDO de segunda ordem acima é não linear. Portanto, vamos obter uma solução aproximada para um pêndulo simples. De acordo com Batista e Mozolevski (2010, p. 149):

“Um das aproximações interessantes consiste em se considerar o regime de pequenas oscilações, isto é, quando o ângulo θ é muito próximo de 0. Nesse caso, as potências de ordem superior de θ , isto é θ^2 , θ^3 , etc., podem ser desprezadas, por serem muito menores que θ . Utilizando a expansão em série de Taylor da função seno: $\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$, podemos considerar a aproximação $\text{sen}(\theta) \approx \theta$. Assim, a equação de movimento do pêndulo simples se escreve simplesmente como: $m\ddot{\theta} = -\frac{mg}{l}\theta$, que pode ser reconhecida facilmente como equação do oscilador harmônico simples”.

Dessa forma, para a EDO acima se tornar linear, vamos supor θ seja um ângulo próximo de zero. Além disso, usaremos a série de Taylor para obter a aproximação do ângulo pequeno, então:

Capítulo 5

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \approx 0 \rightarrow \text{sen}(\theta) \approx \theta.$$

Assim,

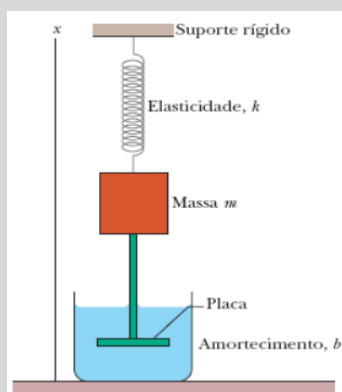
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

A EDO de segunda ordem $\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$ é linear. Usando o método de coeficientes constantes podemos chegar na solução.

5.3.3 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO SIMPLES

Para Halliday e Resnick (2022), a figura 4, representa um oscilador harmônico simples amortecido ideal. “Uma placa imersa em um líquido exerce uma força de amortecimento sobre o bloco enquanto o bloco oscila paralelamente ao eixo x ” (HALLIDAY; RESNICK, 2022, p. 80).

Figura 5 - Oscilador harmônico amortecido simples



Fonte: Halliday e Resnick (2022, p. 80).

Para modelar e chegar à EDO que descreve o movimento harmônico amortecido simples consideremos:

k : constante de elasticidade da mola

b : constante de amortecimento

m : massa

ω : aceleração angular

Capítulo 5

Força da mola: $F = -k \cdot x$

Força da amortecimento: $F = -b \cdot v$

Temos ainda: $\gamma = \frac{b}{m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

$$\sum F = ma$$

$$m \cdot a = -kx - b \cdot v$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - m\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x + m\gamma \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\div m)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = 0.$$

A equação diferencial acima descreve o movimento do oscilador harmônico amortecido simples. Usando o método de coeficientes constantes, temos a seguinte equação característica:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2$$

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

Caso I: $\Delta > 0$, amortecedor supercrítico, $\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$.

Assim:

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Onde, A e B são constantes arbitrárias e podem ser determinadas se forem dadas as condições iniciais.

Caso II: $\Delta = 0$, amortecedor crítico, $\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 0$.

Assim:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2}$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}.$$

Caso III: $\Delta < 0$, amortecimento subcrítico, $\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$.

Capítulo 5

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{-(-\gamma^2 + 4\omega_0^2)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}i.$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)].$$

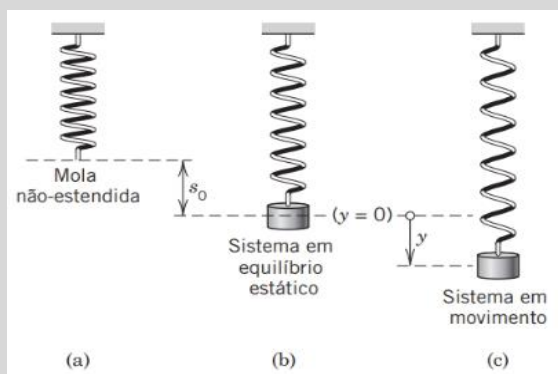
Sendo, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Nesse terceiro caso, como o amortecimento é pequeno, é conveniente escrever na forma: $x(t) = Re^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t - \delta)$, onde: $A = R\cos\delta$, $B = R\sin\delta$.

$$\text{Assim: } R = \sqrt{A^2 + B^2}, \tan\delta = \frac{B}{A}.$$

5.3.4 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Agora, vamos determinar o modelo do sistema mecânico massa-mola, também chamado de movimento harmônico simples, devemos considerar uma mola comum com um corpo de massa m preso na sua extremidade, suspensa verticalmente num suporte fixo, figura 6, que resista à compressão e a extensão. Consideremos m grande, assim desprezamos a massa da mola. Ao puxarmos o corpo para baixo de uma certa distância em relação a origem e soltarmos, ele entrará em movimento.

Figura 6 – Movimento harmônico simples



Fonte: KREYSZIG (2019, p. 49).

Capítulo 5

Para modelar e chegar à EDO que descreve o movimento harmônico simples, temos:

$$F = -k \cdot x$$

$$m \cdot a + kx = 0 \quad : (m)$$

$$a + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$$

$$x'' + \omega_0^2x = 0.$$

Usando o método de coeficientes constantes, temos a seguinte equação característica:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = -4\omega_0^2$$

$$\lambda = \frac{\pm \sqrt{-4\omega_0^2}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\omega_0 \cdot i}{2} = \omega_0 \cdot i$$

$$\lambda_2 = -\frac{2\omega_0 \cdot i}{2} = -\omega_0 \cdot i$$

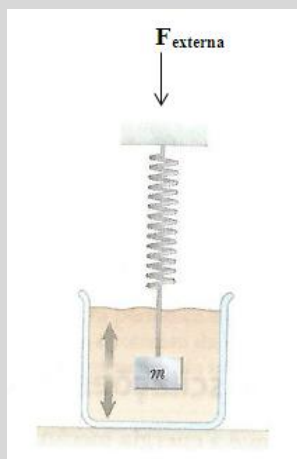
Considerando, $\Delta < 0$, amortecimento subcrítico, pode-se escrever:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

5.3.5 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO E FORÇADO

Figura 7 – Movimento harmônico amortecido e forçado

Capítulo 5



Fonte: Jewett, Jr e Serway (2011, p. 19).

Para modelar e chegar à EDO que descreve o movimento harmônico amortecido e forçado, figura 7, na página anterior, consideremos:

k: constante de elasticidade da mola

b: constante de amortecimento

m: massa

ω : aceleração angular

Força da mola: $F = -k \cdot x$

Força da amortecimento: $F = -b \cdot v$

Força externa: $F = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$$\sum F = ma$$

$$m \cdot a = -kx - b \cdot v + F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2x - m\gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega^2x + m\gamma \frac{dx}{dt} = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (\div m)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)}{m}$$

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2x = \frac{F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)}{m}$$

Considerando: $z = t \rightarrow z' = 1$.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' = \frac{F_0 \cdot \cos(\omega t)}{m} - \gamma y - \omega_0^2 x \\ z' = 1 \end{cases}$$

Capítulo 5

Portanto, temos o sistema de EDO de primeira ordem autônomos (3 graus de liberdade = x, y, z).

5.3.6 SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

Podemos modelar um sistema massa-mola-amortecedor, desde suspensão de veículos, mesas vibratórias, análise de vibração em estruturas e componentes mecânicos, vibrações de moléculas, entre outras. Em particular, vamos considerar um sistema mecânico massa-mola-amortecedor do hb 20, motor 1.0 ano 2015, com a massa do carro desprezível, figura 8. Um amortecedor é um dispositivo que produz um atrito ou amortecimento hidráulico. Nesse sistema, m representa a massa, b , o coeficiente de atrito viscoso, e k , seja a constante da mola.

Figura 8 – Amortecedor dianteiro direito do hb20

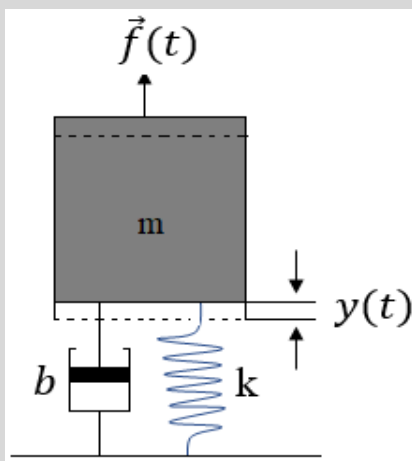


Fonte: elaborada pelo autor (2021).

Vamos considerar o sistema massa-mola-amortecedor, representado pela figura 9.

Figura 9 - Ilustração do amortecedor

Capítulo 5



Fonte: elaborada pelo autor (2021).

De acordo com a figura 9, temos:

$f(t)$ = Força motora;

m = Massa;

k = Constante elástica;

b = Constante de amortecimento;

$y(t)$ = Deslocamento a partir da posição de equilíbrio.

Diante do sistema, podemos aplicar a segunda lei de Newton numa única direção à vertical com massa constante.

$$\sum F = m \cdot a.$$

Considerando F , a força resultante, temos:

$$F = f(t) - f_e - f_a.$$

Onde,

f_e = força elástica da mola

f_a = força de amortecimento

É óbvio, quando a força $f(t)$ promove o movimento para cima, existe uma reação contrária ao movimento, exercida pelas forças da mola e do amortecedor (3ª lei de Newton). Considerando, de acordo com a lei de Hooke $f_e = -ky$. O amortecimento se baseia no conceito de resistência de um fluido para baixas e altas velocidades que surge na transferência de um fluido entre duas câmaras dentro do amortecedor.

A força de resistência do fluido, é proporcional a velocidade ao quadrado. Entretanto, esse fator provoca uma não linearidade, inviabilizando a solução analítica da equação diferencial que vamos chegar. Portanto, vamos considerar uma força de resistência do fluido proporcional a velocidade, isto é: $f_a = bv$.

Capítulo 5

Reescrevendo a equação, temos:

$$ma = f(t) - ky - bv$$

$$ma + bv + ky = f(t)$$

Mas:

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} \text{ e } v = \frac{dy}{dt}$$

Então:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = f(t)$$

Assim:

$$my'' + by' + ky = f(t).$$

Portanto, a equação acima é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficiente constante. Na ausência da força motora $f(t)$ nos leva a uma EDO homogênea.

$$my'' + by' + ky = 0.$$

A equação característica é dada por:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0.$$

A solução da equação (22) é: $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$. Sendo $\Delta = b^2 - 4mk$.

De acordo com a análise do termo $\Delta = b^2 - 4mk$, temos 3 casos de movimentos:

Caso 1. Se $b^2 - 4mk > 0$, então temos a condição superamortecida.

Caso 2. Se $b^2 - 4mk = 0$, então temos a condição criticamente amortecida.

Caso 3. Se $b^2 - 4mk < 0$, então temos a condição subamortecida.

5.4 TÉRMICA

5.4.1 LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

De acordo com Kreyszig (2019), a lei de resfriamento de Newton afirma que a taxa de variação de temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante T_a do meio ambiente,

Capítulo 5

isto é: $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_a)$.

Onde:

T: temperatura do corpo no instante t

T_a : temperatura constante do ambiente

$T - T_a$: diferença de temperatura

t: tempo

k: constante de proporcionalidade positiva que depende do material que constitui o corpo, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente.

Considere a equação a seguir como um modelo matemático:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_a).$$

Para modelagem matemática, vamos considerar o método de separação de variáveis. Multiplicando ambos os membros da equação por dt, temos:

$$dT = -k \cdot (T - T_a)dt.$$

Dividindo ambos os membros da equação por $(T - T_a) \neq 0$:

$$\frac{dT}{(T - T_a)} = -kdt.$$

Integrando ambos os membros:

$$\int \frac{dT}{(T - T_a)} = \int -kdt$$

$$\ln(T - T_a) = -kt + c.$$

Usando a definição de logaritmos:

$$T - T_a = e^{-kt+c}.$$

Isolamos T:

$$T = e^{-kt+c} + T_a.$$

Aplicando as propriedades das potências:

$$T = e^{-kt} \cdot e^c + T_a$$

Fazendo: $e^c = c_1$, temos:

$$T(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + T_a$$

A equação acima é a solução geral com a constante arbitrária c_1 .

Capítulo 5

5.5 ELETRICIDADE

5.5.1 CIRCUITOS EM SÉRIE RLC

De acordo com Boyce e Diprima (2017), iremos apresentar alguns conceitos básicos necessários para o modelo do fluxo da corrente elétrica para um circuito elétrico. A corrente elétrica $I(t)$, medida em ampères (A), é uma função do tempo t , bem como a carga $Q(t)$, medida em Coulomb (C). A resistência R em ohms (Ω), a indutância L em henrys (H), a capacitância C em farad (F) e a tensão E em volts (V), formam os componentes do fluxo de corrente no circuito RL e RC . Esse, dado pelas leis de Ohm e Kirchoff. Dessa forma, os modelos são equações diferenciais lineares de primeira ordem que resultam da aplicação das seguintes leis:

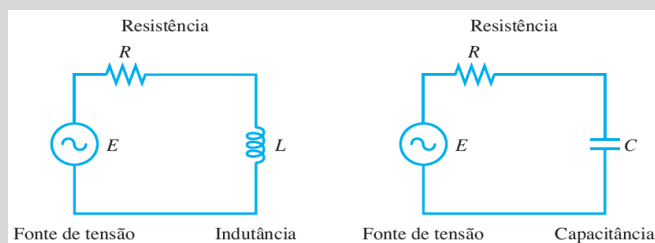
(a) Segunda lei de Kirchoff: “Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito” (BOYCE; DIPRIMA, 2017, p. 170).

(b) Lei de Ohm: A queda de tensão elétrica no resistor percorrido por uma corrente de intensidade I é proporcional a esta corrente, $E = R \cdot I$. A constante de proporcionalidade é a resistência do resistor.

(3) A queda de tensão no indutor é proporcional à taxa de variação da corrente, $E = L \frac{dI}{dt}$, onde L é a indutância do indutor.

(4) A queda de tensão no capacitor é dada por $E = \frac{1}{C} \cdot q$, onde q é a carga no capacitor e C é a capacitância.

Figura 10 - Circuito RL e RC



Fonte: Nagle; Saff; Snider (2012, 90).

Para um circuito RL, aplicando as leis acima, temos o modelo a seguir:

$$E(t) - R \cdot I - L \left(\frac{dI}{dt} \right) = 0$$

Capítulo 5

$$L \left(\frac{dI}{dt} \right) + R \cdot I = E(t) \text{ (multiplicando por } dt)$$

$$L \left(\frac{dI}{dt} \right) dt + R \cdot I dt = E(t) dt$$

$$L dI + R \cdot I dt - E(t) dt = 0$$

$$L dI + (R \cdot I - E(t)) dt = 0 \text{ (dividindo por } (R \cdot I - E(t)) \neq 0)$$

$$\frac{L}{R \cdot I - E(t)} dI + dt = 0$$

$$\int \frac{L}{R \cdot I - E(t)} dI + \int dt = c_1$$

$$t + \frac{L}{R} \ln |R \cdot I - E| = c \text{ (multiplicando por } \frac{R}{L})$$

$$t \cdot \frac{R}{L} + \ln |R \cdot I - E| = c_1 \cdot \frac{R}{L}$$

$$\ln |R \cdot I - E| = c_1 \cdot \frac{R}{L} - t \cdot \frac{R}{L}$$

$$R \cdot I - E = e^{c_1 \cdot \frac{R}{L} - t \cdot \frac{R}{L}}$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$R \cdot I - E = (e^{c_1})^{\frac{R}{L}} \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}}$$

$$R \cdot I - E = c_2^{\frac{R}{L}} \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}}$$

$$c_2^{\frac{R}{L}} = c$$

$$R \cdot I - E = c \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}}$$

$$R \cdot I = E + c \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}}$$

$$I = \frac{1}{R} \cdot \left(E + c \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}} \right)$$

Isto é,

$$I(t) = \frac{1}{R} \cdot \left(E + c \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}} \right), c \in R.$$

Para o circuito RC, aplicando as leis anteriores, temos o modelo a seguir:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q - E(t) = 0$$

$$R \left(\frac{dq}{dt} \right) + \frac{1}{C} q - E(t) = 0 \text{ (multiplicando por } dt)$$

$$R \cdot dt + \frac{1}{C} q \cdot dt - E(t) \cdot dt = 0$$

$$R dq + dt \cdot \left(\frac{q}{C} - E \right) = 0 \text{ (dividindo por } \left(\frac{q}{C} - E(t) \right) \neq 0)$$

Capítulo 5

$$\frac{R}{\frac{q}{C} - E} dq + dt = 0$$

$$\int \frac{R}{\frac{q}{C} - E} dq + \int dt = 0$$

$$\int \frac{R}{\frac{q}{C} - E} dq + t + k = 0$$

$$u = \frac{q}{C} - E$$

$$\frac{du}{dq} = \frac{1}{C}$$

$$du = \frac{1}{C} dq$$

$$dq = C du$$

$$R \int \frac{C}{u} du + t + k = 0$$

$$RC \ln u + t + k = 0$$

$$RC \ln \left(\frac{q}{C} - E \right) + t + k = 0$$

$$RC \ln \left(\frac{q}{C} - E \right) = -t - k \text{ (dividindo por RC)}$$

$$\ln \left(\frac{q}{C} - E \right) = -\frac{t}{RC} - \frac{k}{RC}$$

$$\frac{q}{C} - E = e^{-\frac{t}{RC} - \frac{k}{RC}}$$

$$e^{-\frac{k}{RC}} = c_1$$

$$\frac{q}{C} = E + c_1 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = CE + C \cdot c_1 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = C \cdot \left(E + c_1 e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Capítulo 5

5.6 FÍSICA NUCLEAR

5.6.1 DECAIMENTO RADIOATIVO

De acordo com Kreyszig (2019), resultados experimentais mostram que, a cada instante, elementos radioativos desintegram a uma taxa proporcional à quantidade presente do elemento. Se $Q(t)$ é a quantidade presente de certo elemento radioativo no instante t qualquer. Então, de acordo com a lei física, a taxa de variação de $Q(t)$ em relação ao tempo t , chamada por $\frac{dQ}{dt}$, é dada por: $\frac{dQ}{dt} = -kQ(t)$, onde, k é uma constante que depende do elemento.

Para modelagem matemática, vamos considerar o método de separação de variáveis. Considere a equação a seguir como um modelo matemático:

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ(t).$$

Multiplicando ambos os membros da equação por dt , temos:

$$dQ = -kQ(t)dt.$$

Dividindo ambos os membros da equação por $Q(t) \neq 0$:

$$\frac{dQ}{Q} = -kdt.$$

Integrando ambos os membros:

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int -k \cdot dt$$

$$\ln Q(t) = -k \cdot t + c.$$

Usando a definição de logaritmos:

$$Q(t) = e^{-k \cdot t + c}.$$

Aplicando as propriedades das potências:

$$Q(t) = e^{-kt} \cdot e^c.$$

Fazendo: $e^c = Q_0$, temos: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-k \cdot t}$.

A equação acima é a solução geral com a constante arbitrária Q_0 .

Capítulo 5

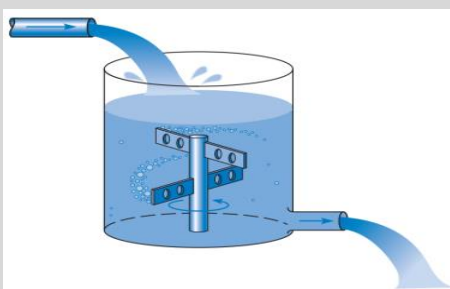
5.7 HIDRODINÂMICA

5.7.1 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

A taxa de variação de uma substância em um tanque, $\frac{dQ}{dt}$, é igual à taxa de entrada da substância, menos a taxa que ela está saindo (BOYCE, DIPRIMA 2017).

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}$$

Figura 11 – Mistura em tanque



Fonte: Boyce e Diprima (2017, p. 44).

6 APLICAÇÕES

6.1 QUEDA LIVRE

Exemplo. Um paraquedista cuja massa é de 100 kg cai de um helicóptero parado a 3.000m acima do solo e desce sob a influência da gravidade. Suponha que a força devido à resistência do ar seja proporcional à velocidade do paraquedista, com a constante de proporcionalidade $b_3 = 20\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ quando o paraquedas está fechado e $b_4 = 100\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ quando o paraquedas está aberto. Se o paraquedas não se abrir até 30 s após o paraquedista pular do helicóptero, depois de quantos segundos ele alcançará o solo?

Resolução:

Como a força de resistência do ar tem diferentes coeficientes de proporcionalidade para o paraquedas fechado e para o paraquedas aberto, precisamos de duas equações diferenciais descrevendo o movimento.

Seja $x_1(t)$, a distância que o paraquedista caiu em t segundos com o paraquedas fechado, $b_3 = 20 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$, a constante de proporcionalidade e $v_1(t)$ sua velocidade. Considerando $m = 100 \text{ kg}$, $g = 9,81\text{m}/\text{s}^2$ e $v_0 = 0$, torna-se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} v_1(t) = \frac{1}{b_3} mg + \left(v_0 - \frac{mg}{b_3} \right) e^{-\frac{b_3 t}{m}} \\ x_1(t) = \frac{mg}{b_3} t + \frac{m}{b_3} \left(v_0 - \frac{mg}{b_3} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{b_3 t}{m}} \right) \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

$$v_1(t) = \frac{1}{20} \cdot 100 \cdot (9,81) + \left(0 - \frac{100 \cdot 9,81}{20} \right) e^{-\frac{20t}{100}}$$

$$v_1(t) = \frac{981}{20} + \left(-\frac{981}{20} \right) e^{-\frac{t}{5}}$$

$$v_1(t) = 49,05 + (-49,05)e^{-\frac{t}{5}}$$

$$v_1(t) = 49,05 - 49,05e^{-\frac{t}{5}}$$

$$x_1(t) = \frac{100 \cdot 9,81}{20} t + \frac{100}{20} \left(0 - \frac{100 \cdot 9,81}{20} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{20t}{100}} \right)$$

$$x_1(t) = \frac{981}{20} t + 5 \left(-\frac{981}{20} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{5}} \right)$$

$$x_1(t) = 49,05t + 5(-49,05) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{5}} \right)$$

$$x_1(t) = 49,05t - 245,25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{5}} \right).$$

Capítulo 6

Quando o paraquedista abre o paraquedas $t_1 = 30s$ após deixar o helicóptero, a distância $x_1(30)$ dele até o helicóptero é de:

$$x_1(30) = 49,05 \cdot (30) - 245,25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{30}{5}}\right)$$

$$x_1(30) = 1471,5 - 245,25 \cdot (1 - e^{-6})$$

$$x_1(30) = 1471,5 - 245,25 + 245,25e^{-6}$$

$$x_1(30) \cong 1226,86.$$

Logo, a distância do paraquedista até o chão é de:

$$3000 - x_1 = 3000 - 1226,86 \cong 1773,14 \text{ m}.$$

A seguir, o cálculo da velocidade v_1 .

$$v_1(30) = 49,05 - 49,05e^{-\frac{30}{5}}$$

$$v_1(30) = 49,05 - 49,05e^{-6}$$

$$v_1(30) \cong 48,93 \text{ m/s}.$$

Definindo a segunda equação, nós, por conveniência, redefinimos o tempo t . Denotando por $x_2(t)$ a distância percorrida pelo paraquedista durante t segundos a partir do momento em que o páraquedas se abre até cair no chão, $b_4 = 100 \text{ N-s/m}$, a constante de proporcionalidade e $v_2(t)$ sua velocidade. Considerando $m = 100 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ e $v_2(0) = v_1(30) = 48,93 \text{ m/s}$, torna-se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} v_2(t) = \frac{1}{b_4}mg + \left(v_0 - \frac{mg}{b_4}\right)e^{-\frac{b_4 t}{m}} \\ x_2(t) = \frac{mg}{b_4}t + \frac{m}{b_4}\left(v_0 - \frac{mg}{b_4}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{b_4 t}{m}}\right) \\ v_0 = 48,93 \end{cases}$$

$$v_2(t) = \frac{1}{100} \cdot 100 \cdot 9,81 + \left(48,93 - \frac{100 \cdot 9,81}{100}\right)e^{-\frac{100t}{100}}$$

$$v_2(t) = 9,81 + (48,93 - 9,81)e^{-t}$$

$$v_2(t) = 9,81 + 39,12e^{-t}$$

$$v_2(t) = 9,81 + 39,12e^{-t}.$$

$$x_2(t) = \frac{100 \cdot 9,81}{100}t + \frac{100}{100}\left(48,93 - \frac{100 \cdot 9,81}{100}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{100t}{100}}\right)$$

$$x_2(t) = 9,81t + (48,93 - 9,81) \cdot (1 - e^{-t})$$

$$x_2(t) = 9,81t + 39,12 \cdot (1 - e^{-t})$$

$$x_2(t) = 9,81t + 39,12 - 39,12e^{-t}.$$

Com o paraquedas aberto, o paraquedista cai $1773,14 \text{ m}$. Assim, para determinar t , fazemos, $x_2(t) = 1773,14 \text{ m}$.

Capítulo 6

$$\begin{aligned}
 1773,14 &= 9,81t + 39,12 - 39,12e^{-t} \\
 1773,14 - 39,12 - 9,81t &= -39,12e^{-t} \\
 1734,02 - 9,81t &= -39,12e^{-t} \\
 -1734,02 + 9,81t &= 39,12e^{-t} \\
 \frac{-1734,02 + 9,81t}{39,12} &= e^{-t} \\
 -44,33 + 0,25t &= e^{-t}.
 \end{aligned}$$

Consideramos, as funções $f(t) = -44,33 + 0,25t$ e $g(t) = e^{-t}$. A seguir, figura 12, os gráficos das funções.

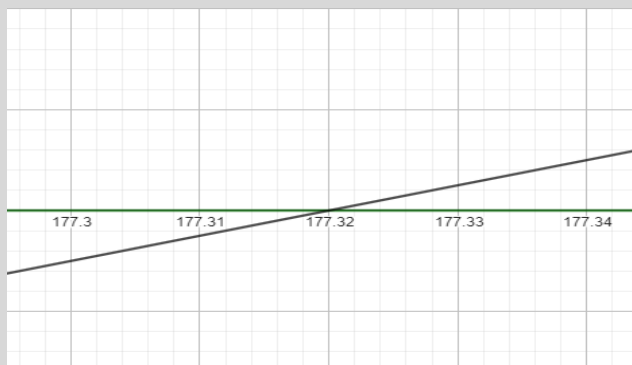
Figura 12- Gráficos das funções $f(t)$ e $g(t)$.



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

Ampliando a imagem no programa geogebra, acesso em: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT, encontramos aproximadamente do instante t_2 na intersecção dos gráficos $f(t)$ e $g(t)$, conforme figura 13.

Figura 13- Ampliação dos gráficos das funções $f(t)$ e $g(t)$.



Fonte: elaborado pelo autor (2022).

Pela intersecção dos gráficos, figura 13, o valor aproximado é $t_2 \cong 177,32s$. Poderíamos ter considerado outro método para determinar o valor do tempo, os métodos iterativos: bissecção, falsa posição, Newton-Raphson, secante, entre outros.

Capítulo 6

Dessa forma, o paraquedista atingirá o solo em, $t_1 + t_2 = 30 + 177,32 = 207,32s$ depois de cair do helicóptero.

6.2 LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

Exemplo 1. Suponha que, no inverno, a temperatura de um certo prédio seja mantida a 20°C e que o aquecimento seja desligado às 22h da noite e religado às 6 h da manhã. Num certo dia, às 2 h da madrugada, a temperatura no interior do prédio era de 15°C . A temperatura exterior era de 10°C às 22 h da noite e caiu para 5°C às 6 h da manhã do dia seguinte. Qual era a temperatura dentro do prédio quando o aquecimento foi ligado às 6 h da manhã?

Resolução:

Consideremos a equação: $T(t) = c_1 e^{-kt} + T_a$. Chamemos de $T(t)$ a temperatura dentro do prédio e de T_a a temperatura exterior (supondo que ela seja constante, para que possamos aplicar a lei de Newton). Dessa forma, segundo essa mesma lei, para determinar a solução geral, vamos aproximar a temperatura T_a , calculando a média aritmética dos valores de 10°C e 5°C . Dessa forma, $T_a = 7,5^\circ\text{C}$. Assim, vamos obter um valor aproximado para a temperatura T no escritório às 6 h da manhã.

Usaremos a constante, $T_a = 7,5^\circ\text{C}$. Então:

$$T(t) = c_1 e^{-kt} + 7,5.$$

Para encontrar a solução particular, escolhemos 22 h da noite para corresponder a $t_0 = 0$. Logo, a condição inicial dada é $T(0) = 20^\circ\text{C}$. Assim, por substituição, temos:

$$T(0) = c_1 e^{-k \cdot 0} + 7,5 = 20$$

$$c_1 e^0 + 7,5 = 20$$

$$c_1 + 7,5 = 20$$

$$c_1 = 20 - 7,5 = 12,5$$

$$c_1 = 12,5$$

$$T(t) = 12,5 e^{-kt} + 7,5.$$

Agora, vamos determinar o valor da constante k . Para tanto, utilizaremos

Capítulo 6

$T(4) = 15$, onde $t = 4$ h, corresponde às 2 h da madrugada.

$$T(4) = 12,5e^{-k \cdot 4} + 7,5 = 15$$

$$12,5e^{-4k} = 15 - 7,5$$

$$12,5e^{-4k} = 7,5$$

$$e^{-4k} = \frac{7,5}{12,5}$$

$$e^{-4k} = \frac{3}{5}$$

$$\ln e^{-4k} = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$-4k \cdot \ln e = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$-4k = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$k = -\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{4}$$

$$k = 0,13$$

$$T(t) = 12,5e^{-0,13t} + 7,5.$$

Por fim, a 6 h da manhã corresponde a $t = 8$ (ou seja, 8 horas após as 10 h da manhã). Então:

$$T(8) = 12,5e^{-0,13 \cdot 8} + 7,5.$$

$$T(8) = 12^\circ\text{C}$$

Dessa forma, a temperatura no interior do prédio caiu aproximadamente 8°C .

Exemplo 2. Numa investigação de um homicídio, ou de uma morte natural ou acidental, é importante determinar um valor aproximado do instante da morte. Para tanto, usamos a Lei do Resfriamento de Newton. Suponha que um cadáver seja encontrado em condições suspeitas no instante $t_0 = 0$. A temperatura do corpo é medida imediatamente pelo perito e o valor obtido é $T = 28^\circ\text{C}$. O corpo é retirado da cena do suposto crime e duas horas depois sua temperatura é novamente medida e o valor encontrado é $T_1 = 22^\circ\text{C}$. Suponha que o crime ocorreu durante a madrugada e corpo foi encontrado pela manhã. Então, a perícia faz uma suposição adicional de que a temperatura do meio ambiente entre a hora da morte T_a e a hora em que o cadáver foi encontrado t_0 tenha se mantido constante no valor aproximado de $T \cong 20^\circ\text{C}$. Além disso, os peritos também

Capítulo 6

sabem que a temperatura normal de um ser humano vivo é de 37 °C. Com esses dados como a perícia pode determinar a hora do crime?

Resolução:

Considere a equação a seguir:

$$T(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + T_a.$$

Quando o tempo $t = 0$ a temperatura $T = 28$ °C, então, temos:

$$28 = c_1 \cdot e^{-k \cdot 0} + 20$$

$$28 - 20 = c_1 \cdot e^{-k \cdot 0}$$

$$8 = c_1.$$

Quando o tempo $t = 2$ h a temperatura $T = 22$ °C, então, temos:

$$T(2) = 8e^{-kt} + 20$$

$$22 = 10e^{-k \cdot 2} + 20$$

$$22 - 20 = 10e^{-2 \cdot k}$$

$$2 = 10e^{-2 \cdot k}$$

$$\frac{2}{10} = e^{-2 \cdot k}$$

$$0,2 = e^{-2 \cdot k}$$

$$\ln 0,2 = \ln e^{-2 \cdot k}$$

$$\ln 0,2 = -2 \cdot k$$

$$k = \frac{\ln 0,2}{-2}$$

$$k \cong 0,8h^{-1}$$

A equação da temperatura T do cadáver é: $T = 8e^{-0,8t} + 20$

$$37 = 8e^{0,8t} + 20$$

$$37 - 20 = 8e^{-0,8t}$$

$$17 = 8e^{-0,8t}$$

$$\frac{17}{8} = e^{-0,8t}$$

$$2,125 = e^{-0,8t}$$

$$\ln 2,125 = \ln e^{-0,8t}$$

$$\ln 2,125 = -0,8t$$

$$t = -\frac{\ln 2,125}{0,8}$$

$$t \cong -1h$$

Capítulo 6

Portanto, o crime ocorreu a aproximadamente uma hora antes de o corpo ser descoberto.

6.3 DECAIMENTO RADIOATIVO

A título de exemplificação, certo material radioativo diminui a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se, inicialmente a quantidade de material é 100 miligramas, e se após duas horas perderam-se 10% da massa original, determine:

(a) a expressão para a massa de substância restante em um tempo arbitrário t .

Resolução:

Seja $Q(t)$ a quantidade presente no instante t e $Q(0) = Q_0$ a quantidade inicial.

Consideremos a equação a seguir:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Quando $t = 0$, a quantidade de material é $Q(0) = 100\text{mg}$, então, temos:

$$100 = Q_0 \cdot e^{-k \cdot 0}$$

$$100 = Q_0$$

Quando $t = 2\text{h}$, a quantidade de material é $Q(2) = 90\text{mg}$, então, temos:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$90 = 100 \cdot e^{-k \cdot 2}$$

$$\frac{90}{100} = e^{-2 \cdot k}$$

$$\frac{9}{10} = e^{-2 \cdot k}$$

$$\ln \frac{9}{10} = \ln e^{-2k}$$

$$\ln 0,9 = -2k$$

$$k = \frac{\ln 0,9}{-2}$$

$$k = \frac{\ln 0,9}{-2}$$

$$k \cong 0,0527 \text{ h}^{-1}.$$

Assim, temos:

Capítulo 6

$$Q(t) = 100. e^{-0,0527.t}$$

(b) a massa restante após 4 horas.

Resolução:

$$Q(4) = 100. e^{-0,0527.4}$$

$$Q(4) = 100. e^{-0,2108}$$

$$Q(4) \cong 81mg.$$

(c) o tempo necessário para que a massa inicial fique reduzida à metade.

Obs: o tempo necessário para reduzir uma substância sujeita a decréscimo à metade da quantidade original é chamada meia-vida da substância.

Resolução:

Quando a quantidade de material é $Q(t) = 50$ mg, temos:

$$Q(t) = 100. e^{-0,0527.t}$$

$$50 = 100. e^{-0,0527.t}$$

$$\frac{50}{100} = e^{-0,0527.t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0,0527.t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{-0,0527.t}$$

$$-\ln 2 = -0,0527.t$$

$$t = \frac{\ln 2}{0,0527}$$

$$t \cong 13h$$

6.4 CIRCUITO RL

A título de exemplificação, suponha que um circuito RL a resistência é 50Ω , a indutância é de $2 H$ e a pilha fornece uma voltagem constante de $110 V$. Determine a corrente I se a corrente inicial é zero.

Resolução:

$$E(t) = 110 V$$

$$L = 2 H$$

Capítulo 6

$$R = 50 \, \Omega$$

$$I(t) = ? \text{ quando } I(0) = 0$$

$$I(t) = \frac{1}{R} \cdot \left(E + c \cdot e^{-t \cdot \frac{R}{L}} \right)$$

$$I(0) = \frac{1}{50} \cdot \left(110 + c \cdot e^{-0 \cdot \frac{R}{L}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{50} \cdot (110 + c) = 0$$

$$110 + c = 0$$

$$c = -110$$

Assim, temos:

$$I(t) = \frac{1}{50} \cdot \left(110 - 110 \cdot e^{-t \cdot \frac{50}{2}} \right)$$

$$I(t) = \frac{1}{50} \cdot (110 - 110 \cdot e^{-25t})$$

$$I(t) = 2,2 - 2,2e^{-25t}$$

6.5 CIRCUITO RC

A título de exemplificação, suponha que um circuito RC, a tensão é de 100 volts, a resistência é de 200 ohms e a capacitância, 10^{-4} farad. Determinar:

a) a carga $q(t)$ no capacitor se $q(0) = 0$.

b) a corrente $I(t)$.

Resolução letra (a):

$$E = 100 \, V$$

$$R = 200 \, \Omega$$

$$C = 10^{-4} \, F$$

$$q(t) = ? \text{ quando } q(0) = 0$$

$$q(t) = C \cdot \left(E + c_1 e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$q(0) = 10^{-4} \cdot \left(100 + c_1 e^{-\frac{0}{RC}} \right) = 0$$

Capítulo 6

$$10^{-4} \cdot (100 + c_1 e^0) = 0$$

$$0,01 + 0,01c_1 = 0$$

$$c_1 = -1$$

Assim, temos:

$$q(t) = 10^{-4} \cdot \left(100 - e^{-\frac{t}{200 \cdot 10^{-4}}} \right)$$

$$q(t) = 10^{-4} \cdot \left(100 - e^{-\frac{t}{200 \cdot 10^{-4}}} \right)$$

$$q(t) = 0,01 - 0,01e^{-\frac{t}{0,02}}$$

$$q(t) = 0,01(1 - e^{-50t})$$

Resolução letra (b):

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 0,5e^{-50t}$$

$$I(t) = 0,5e^{-50t}.$$

6.6 HIDRODINÂMICA

Vamos apresentar dois problemas. O primeiro, resolveremos pelo método de separação de variáveis, sobre a entrada e saída de salmoura em um tanque. E o segundo, pelo método do fator integrante, sobre a entrada e saída de um produto químico em uma lagoa, tal como sugere Boyce e Diprima (2017) na página 48.

Exemplo 1. *Vamos supor um grande tanque de mistura contenha 300 litros de salmoura com 20 kg de sal. Em $t = 0$, começa entrar no tanque outra salmoura a uma taxa de três litros de sal por minuto (3l/min); a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 2 kg por litro (2kg/l). Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora a mesma taxa em que a segunda salmoura entrou. Se $Q(t)$ denotar a quantidade de sal (medida em quilos) no tanque no instante t , a taxa segundo a qual $Q(t)$ varia será uma taxa líquida. Determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t .*

$$\frac{dQ}{dt} = (\text{taxa de entrada de sal}) - (\text{taxa de saída de sal}) = R_e - R_s$$

$R_e = (\text{taxa de entrada de salmoura}) \cdot (\text{concentração de sal no fluxo de entrada}) = \text{taxa de entrada de sal}.$

Capítulo 6

$$R_e = 3 \frac{l}{min} \cdot 2 \frac{kg}{l} = 6 \frac{kg}{min}$$

Uma vez que a solução está sendo bombeada para fora e para dentro do tanque a mesma taxa, o número de litros de salmoura no tanque no instante t é constante e igual a 300 litros. Assim sendo, a concentração de sal no tanque e no fluxo de saída é de $\frac{Q(t)}{300} \cdot \frac{kg}{l}$, e a taxa de saída de sal R_s é:

$R_s = (\text{taxa de saída de salmoura}) \cdot (\text{concentração de sal no fluxo de saída}) = \text{taxa de saída de sal.}$

$$R_s = 3 \frac{l}{min} \cdot \frac{Q}{300} \frac{kg}{l} = \frac{Q}{100} \frac{kg}{min}$$

Então:

$$\frac{dQ}{dt} = 6 - \frac{Q}{100}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{600 - Q}{100}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{-(-600 + Q)}{100}$$

$$\int \frac{dQ}{-600 + Q} + \int \frac{-1}{100} dt$$

$$\ln(-600 + Q) = -\frac{1}{100}t + c_1$$

$$-600 + Q = e^{-\frac{1}{100}t + c_1}$$

$$Q = 600 + e^{-\frac{1}{100}t} \cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1} = c$$

$$Q(t) = 600 + ce^{-\frac{1}{100}t}$$

No instante $t = 0$, temos: $Q(0) = 20$, assim:

$$020 = 600 + ce^{-\frac{1}{100}0}$$

$$20 - 600 = c$$

$$c = -580$$

Portanto,

$$A(t) = 600 - 580e^{-\frac{1}{100}t}.$$

Exemplo 2. Considere como modelo uma lagoa que contém, inicialmente, 20 milhões de galões de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 8 milhões de galões por ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A

Capítulo 6

concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 3 + \text{sen}(3t)$ g/gal (gramas por galão). Dessa forma, vamos construir um modelo matemático que expressa o processo de fluxo e a quantidade de produto químico presente em uma lagoa em qualquer instante.

Por hipótese, os fluxos de entrada e saída de água são iguais, assim, a quantidade de água na lagoa é constante com $2 \cdot 10^7$ galões. Chamaremos o tempo de t , medindo em anos, e a massa do produto químico por $Q(t)$, medida em gramas. A taxa de entrada e saída é referente ao fluxo de produto químico que entra e sai da lagoa. Dessa forma, temos:

$$(a) \text{ Taxa de entrada} = 8 \cdot 10^6 \frac{\text{gal}}{\text{ano}} \cdot (3 + \text{sen}3t) \frac{\text{g}}{\text{gal}}$$

A concentração de produto químico na lagoa é de $\frac{Q(t)}{2 \cdot 10^7} \frac{\text{g}}{\text{gal}}$. Assim, a taxa de saída é dada por:

$$(b) \text{ Taxa de saída} = 8 \cdot 10^6 \frac{\text{gal}}{\text{ano}} \cdot \frac{Q(t)}{2 \cdot 10^7} \frac{\text{g}}{\text{gal}} = 0,4Q(t) \frac{\text{g}}{\text{ano}}$$

Logo, a equação diferencial de primeira ordem é dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = 8 \cdot 10^6 \cdot (3 + \text{sen}3t) - 0,4Q(t) \frac{\text{g}}{\text{ano}}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 24 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^6 \text{sen}3t - 0,4Q(t).$$

Considera-se que no início não há presença de produto químico na lagoa, assim a condição inicial é dada por:

$$q(0) = 0.$$

A equação acima é linear. Entretanto, temos uma equação que não é separável. Dessa forma, vamos precisar usar o método do fator integrante. Consideremos a equação:

$$\frac{dQ}{dt} = 24 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^6 \text{sen}3t - 0,4Q(t).$$

Primeiramente, vamos deixar com o formato padrão:

$$Q' + \frac{4}{10}Q = 24 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^6 \text{sen}3t$$

Nesse momento, vamos calcular o fator integrante $p(t) = e^{\int p(t)dt}$.

$$p(t) = e^{\int \frac{4}{10}dt}.$$

Dessa forma, podemos integrar nossa equação:

$$y = \frac{1}{e^{\frac{4}{10}t}} \left(\int e^{\frac{4}{10}t} \cdot (24 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^6 \text{sen}3t) dt + C \right)$$

Capítulo 6

$$y = \frac{1}{e^{\frac{4}{10}t}} \left(\int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot 24 \cdot 10^6 + e^{\frac{4}{10}t} \cdot 8 \cdot 10^6 \operatorname{sen}3t) dt + C \right)$$

$$y = \frac{1}{e^{\frac{4}{10}t}} \left(\int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot 24 \cdot 10^6) dt + \int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot 8 \cdot 10^6 \operatorname{sen}3t) dt + C \right)$$

$$y = \frac{1}{e^{\frac{4}{10}t}} \left(24 \cdot 10^6 \cdot \int (e^{\frac{4}{10}t}) dt + 8 \cdot 10^6 \cdot \int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot \operatorname{sen}3t) dt + C \right).$$

Vamos resolver as integrais da seguinte forma:

(i) por substituição: $\int (e^{\frac{4}{10}t}) dt$;

(ii) por partes: $\int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot \operatorname{sen}3t) dt$.

Resolvendo (i):

$$\int (e^{\frac{4}{10}t}) dt$$

$$u = \frac{4}{10}t$$

$$du = \frac{4}{10} dt$$

$$\frac{10}{4} du = dt$$

$$\int e^u \cdot \frac{10}{4} du$$

$$\frac{10}{4} \int e^u \cdot du$$

$$\frac{10}{4} e^{\frac{4}{10}t}.$$

Resolvendo (ii):

$$\int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot \operatorname{sen}(3t)) dt$$

$$u = \operatorname{sen}(3t) \text{ e } dv = e^{\frac{4}{10}t} dt$$

$$du = \frac{1}{3} \cos(3t) dt \text{ e } v = \int e^{\frac{4}{10}t} dt$$

$$v = \frac{10}{4} e^{\frac{4}{10}t}.$$

Então, escrevemos: $u \cdot v - \int v \cdot du$.

$$\int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot \operatorname{sen}(3t)) dt = \operatorname{sen}(3t) \cdot \frac{10}{4} e^{\frac{4}{10}t} - \int \left(\frac{10}{4} e^{\frac{4}{10}t} \cdot \frac{1}{3} \cos(3t) \right) dt$$

$$\int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot \operatorname{sen}(3t)) dt = \frac{10}{4} e^{\frac{4}{10}t} \cdot \operatorname{sen}(3t) - \frac{10}{12} \int (e^{\frac{4}{10}t} \cdot \cos(3t)) dt$$

Capítulo 6

$$\int \left(e^{\frac{4}{10}t} \cdot \text{sen}(3t) \right) dt = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) - \frac{5}{6} \int e^{\frac{2}{5}t} \cdot \cos(3t) dt.$$

Agora, vamos precisar fazer mais uma integração por partes.

$$\int \left(e^{\frac{2}{5}t} \cdot \cos(3t) \right) dt$$

$$u = \cos(3t) \text{ e } dv = e^{\frac{2}{5}t} dt$$

$$du = -3\text{sen}(3t) \text{ e } v = \int e^{\frac{2}{5}t} dt$$

$$v = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t}.$$

Então, escrevemos: $u \cdot v - \int v \cdot du$.

$$\int \left(e^{\frac{2}{5}t} \cdot \cos(3t) \right) dt = \cos(3t) \cdot \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} - \int \left(-3\text{sen}(3t) \cdot \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} \right) dt$$

$$\int \left(e^{\frac{2}{5}t} \cdot \cos(3t) \right) dt = \cos(3t) \cdot \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} + \frac{3}{2} \int \left(\text{sen}(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} \right) dt.$$

Assim, temos:

$$\int \left(e^{\frac{4}{10}t} \cdot \text{sen}(3t) \right) dt = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) - \frac{5}{6} \cdot \left(\cos(3t) \cdot \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} + \frac{3}{2} \int \left(\text{sen}(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} \right) dt \right)$$

$$\int \left(e^{\frac{4}{10}t} \cdot \text{sen}(3t) \right) dt = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) - \frac{25}{12} \cdot \cos(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} + \frac{15}{12} \int \left(\text{sen}(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} \right) dt$$

$$\int \left(e^{\frac{4}{10}t} \cdot \text{sen}(3t) \right) dt = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) - \frac{25}{12} \cdot \cos(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} + \frac{5}{4} \int \left(\text{sen}(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} \right) dt$$

$$\int \left(e^{\frac{4}{10}t} \cdot \text{sen}(3t) \right) dt - \frac{5}{4} \int \left(\text{sen}(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} \right) dt = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) - \frac{25}{12} \cdot \cos(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t}$$

$$-\frac{1}{4} \int \left(\text{sen}(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} \right) dt = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) - \frac{25}{12} \cdot \cos(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t}.$$

Multiplicando por (-4), temos:

$$\int \left(\text{sen}(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} \right) dt = -10 e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) + \frac{25}{3} \cdot \cos(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t}.$$

Por fim, podemos escrever nossa função como:

$$y = \frac{1}{e^{\frac{2}{5}t}} \left(24 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{10}{4} e^{\frac{2}{5}t} \right) + 8 \cdot 10^6 \cdot \left(-10 e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) + \frac{25}{3} \cdot \cos(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} \right) + C \right)$$

$$y = \frac{1}{e^{\frac{2}{5}t}} \left(6 \cdot 10^7 \cdot e^{\frac{2}{5}t} - 8 \cdot 10^7 \cdot e^{\frac{2}{5}t} \cdot \text{sen}(3t) + \frac{2}{3} \cdot 10^8 \cdot \cos(3t) \cdot e^{\frac{2}{5}t} + C \right)$$

$$y(t) = 6 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^7 \cdot \text{sen}(3t) + \frac{2}{3} \cdot 10^8 \cdot \cos(3t) + \frac{C}{e^{\frac{2}{5}t}}$$

Capítulo 6

Para obter o valor da constante C , vamos usar a condição inicial do problema $y(0) = 0$.

$$0 = 6 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^7 \cdot \text{sen}(0) + \frac{2}{3} \cdot 10^8 \cdot \cos(0) + \frac{C}{e^{\frac{2}{5} \cdot 0}}$$

$$0 = 6 \cdot 10^7 + \frac{2}{3} \cdot 10^8 + C$$

$$C = -6 \cdot 10^7 - \frac{2}{3} \cdot 10^8$$

$$C = -\frac{38}{3} 10^7$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é dada por:

$$y(t) = 6 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^7 \cdot \text{sen}(3t) + \frac{2}{3} \cdot 10^8 \cdot \cos(3t) + \frac{-\frac{38}{3} 10^7}{e^{\frac{2}{5}t}}$$

$$y(t) = 6 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^7 \cdot \text{sen}(3t) + \frac{2}{3} \cdot 10^8 \cdot \cos(3t) - \frac{38}{3} 10^7 \cdot e^{-\frac{2}{5}t}.$$

6.7 OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO SIMPLES

A título de exemplificação, o bloco possui massa de 1,50 kg e constante elástica igual a 8,00 N/m. A força de amortecimento é dada por $-b\left(\frac{dx}{dt}\right)$, onde $b = 230$ g/s. O bloco é puxado 12,0 cm para baixo e liberado. (a) Calcule o tempo necessário para que a amplitude das oscilações resultantes diminua para um terço do valor inicial. (b) Quantas oscilações o bloco realiza nesse intervalo de tempo? (HALLIDAY e RESNICK, 2022, p. 85):

Resolução:

Sabemos que a força de amortecimento é a única responsável por diminuir a amplitude do movimento. A equação característica é dada por:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Vamos calcular o valor de Δ . Para isto, destacamos: $a = 1$, $b = \frac{b}{m}$ e $c = \frac{k}{m}$.

Assim: $a = 1$, $b = \frac{0,23}{1,5}$ e $c = \frac{8}{1,5}$. Logo:

Capítulo 6

$$\Delta = \left(\frac{0,23}{1,5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{8}{1,5}\right)$$

$$\Delta = -21,3$$

De acordo com a teoria, o amortecimento é subcrítico. Logo, a equação geral é dada por: $x(t) = Re^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t - \delta)$.

A amplitude do movimento é: $Re^{-\frac{\gamma}{2}t}$ e a amplitude inicial é R . Portanto, temos:

$$Re^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{1}{3}R$$

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{1}{3}$$

$$\ln e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \ln \frac{1}{3}$$

$$-\frac{\gamma}{2}t = \ln \frac{1}{3}$$

$$\gamma t = -2 \ln \frac{1}{3}$$

Sabendo que: $\gamma = \frac{b}{m}$, temos: $\gamma = \frac{0,23}{1,5}$.

Logo: $t = \frac{2 \ln \frac{1}{3}}{\frac{0,23}{1,5}} \cong 14,3s$.

Temos que: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$.

Então: $\omega = \sqrt{\frac{8}{1,5} - \frac{(0,23)^2}{4(1,5)^2}}$,

$$\omega \cong 2,3 \frac{rad}{s}$$

O período é dado por: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Dessa forma: $T = \frac{2\pi}{2,3} \cong 2,73s$.

Portanto: $n = \frac{t}{T} = \frac{14,3}{2,73} \cong 5,24$ oscilações.

Como n tem que ser inteiro, aproximadamente 5 oscilações.

Capítulo 6

6.8 SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

Vamos considerar a massa do conjunto em movimento igual a 5 kg. A análise será feita com motor desligado, então $f(t) = 0$ (equação homogênea), com as seguintes condições iniciais: $y(0) = -0,01$ m e $y'(0) = 2$ m/s.

Exemplo 1. Considerar $k = 1000$ N/m e $b = 150$ N.s/m.

A equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes é dada por:

$$5y'' + 150y' + 1000y = 0$$

A equação característica é dada por:

$$5\lambda^2 + 150\lambda + 1000 = 0$$

Dividindo a equação por 5, temos:

$$\lambda^2 + 30\lambda + 200 = 0$$

$$\Delta = (30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200$$

$$\Delta = 900 - 800$$

$$\Delta = 100$$

$$\lambda = \frac{-30 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-30 + 10}{2} = -10$$

$$\lambda_2 = \frac{-30 - 10}{2} = -20$$

Portanto: $y(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-20t}$.

Considerando a condição inicial $y(0) = -0,01$ m, temos:

$$-0,01 = c_1 e^{-10 \cdot 0} + c_2 e^{-20 \cdot 0}$$

$$-0,01 = c_1 e^0 + c_2 e^0$$

$$-0,01 = c_1 + c_2$$

Considerando a condição inicial $y'(0) = 2$ m/s, temos:

$$y'(t) = -10c_1 e^{-10t} - 20c_2 e^{-20t}$$

$$2 = -10c_1 e^{-10 \cdot 0} - 20c_2 e^{-20 \cdot 0}$$

$$2 = -10c_1 e^0 - 20c_2 e^0$$

Capítulo 6

$$2 = -10c_1 - 20c_2$$

Considere as equações a seguir:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -0,01 \\ -10c_1 - 20c_2 = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 10, temos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} 10c_1 + 10c_2 = -0,1 \\ -10c_1 - 20c_2 = 2 \end{cases}$$

Somando as equações, temos:

$$-10c_2 = 1,9$$

$$c_2 = -0,19$$

Substituindo c_2 para obter c_1 , temos:

$$c_1 - 0,19 = -0,01$$

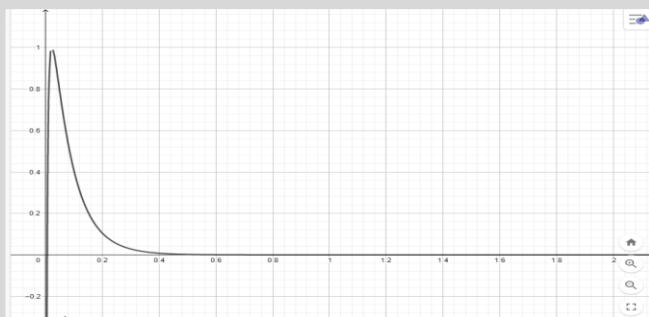
$$c_1 = -0,01 + 0,19$$

$$c_1 = 0,18$$

Portanto, $y(t) = 0,18e^{-10t} - 0,19e^{-20t}$.

Vamos usar o programa Geogebra para representar o gráfico da função acima.

Figura 14 - Gráfico da função $y(t)$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Neste caso o sistema é **superamortecido** e, portanto, não tem oscilação periódica, em função do forte amortecimento.

Exemplo 2. Vamos considerar as informações do exemplo 1, porém $k = 1000$ N/m e $b = 50$ N.s/m.

A equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes é dada por:

$$5y'' + 50y' + 1000y = 0$$

A equação característica é dada por:

$$5\lambda^2 + 50\lambda + 1000 = 0$$

Capítulo 6

Dividindo a equação por 5, temos:

$$\lambda^2 + 10\lambda + 200 = 0$$

$$\Delta = (10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200$$

$$\Delta = 100 - 800$$

$$\Delta = -700$$

$$\lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{-700}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-10 + 10\sqrt{7}i}{2} = -5 + 5\sqrt{7}i$$

$$\lambda_2 = \frac{-10 - 10\sqrt{7}i}{2} = -5 - 5\sqrt{7}i$$

Portanto:

$$y(t) = e^{-5t} [c_1 \cos(5\sqrt{7}t) + c_2 \operatorname{sen}(5\sqrt{7}t)]$$

Considerando a condição inicial $y(0) = -0,01$ m, temos:

$$-0,001 = e^{-5 \cdot 0} [c_1 \cos(5\sqrt{7} \cdot 0) + c_2 \operatorname{sen}(5\sqrt{7} \cdot 0)]$$

$$-0,001 = e^0 [c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0)]$$

$$-0,001 = [c_1 \cos(0)]$$

$$c_1 = -0,001$$

$$y(t) = e^{-5t} [-0,001 \cos(5\sqrt{7}t) + c_2 \operatorname{sen}(5\sqrt{7}t)]$$

$$y(t) = -0,001 e^{-5t} \cos(5\sqrt{7}t) + c_2 e^{-5t} \operatorname{sen}(5\sqrt{7}t).$$

Agora, vamos determinar a primeira derivada da equação acima:

$$y'(t) = 0,005 e^{-5t} \cdot \cos(5\sqrt{7}t) - 0,001 e^{-5t} \cdot (-5\sqrt{7} \operatorname{sen}(5\sqrt{7}t)) + c_2 \cdot (-5e^{-5t} \cdot \operatorname{sen}(5\sqrt{7}t) + e^{-5t} \cdot (5\sqrt{7} \cos(5\sqrt{7}t))).$$

Considerando a condição inicial $y'(0) = 2$ m/s, temos:

$$2 = 0,005 e^{-5 \cdot 0} \cdot \cos(5\sqrt{7} \cdot 0) - 0,001 e^{-5 \cdot 0} \cdot (-5\sqrt{7} \operatorname{sen}(5\sqrt{7} \cdot 0))$$

$$+ c_2 \cdot (-5e^{-5 \cdot 0} \cdot \operatorname{sen}(5\sqrt{7} \cdot 0) + e^{-5 \cdot 0} \cdot (5\sqrt{7} \cos(5\sqrt{7} \cdot 0)))$$

$$2 = 0,005 e^0 \cdot \cos(0) - 0,001 e^0 \cdot (-5\sqrt{7} \operatorname{sen}(0)) + c_2 \cdot (-5e^0 \cdot \operatorname{sen}(0) + e^0 \cdot (5\sqrt{7} \cos(0)))$$

$$2 = 0,005 + 5\sqrt{7}c_2$$

$$2 - 0,005 = 5\sqrt{7}c_2$$

$$1,995 = 5\sqrt{7}c_2$$

$$c_2 = \frac{1,995}{5\sqrt{7}}$$

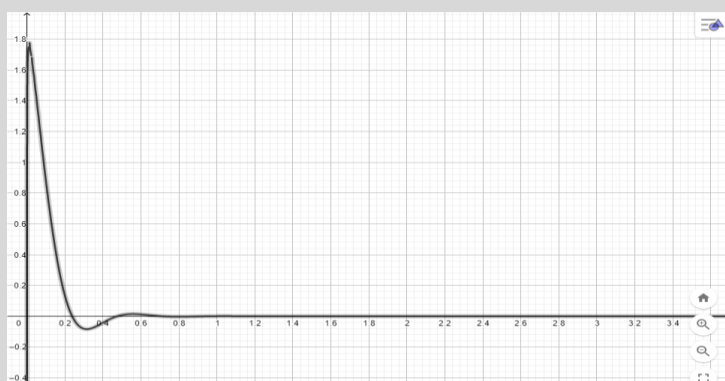
Capítulo 6

$$c_2 = \frac{1,995\sqrt{7}}{35}$$

Portanto, $y(t) = e^{-5t} \left[-0,001 \cos(5\sqrt{7}t) + \frac{1,995\sqrt{7}}{35} \text{sen}(5\sqrt{7}t) \right]$.

Vamos usar o programa Geogebra para representar o gráfico da função acima.

Figura 15 – Gráfico da função $y(t)$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Percebemos, na condição do exemplo 2, uma oscilação periódica, o que caracteriza o movimento **subamortecido**.

O argumento do seno e cosseno resultante da parte imaginária da solução complexa representa fisicamente $2\pi ft$, onde f é a frequência, então:

$$2\pi ft = 5\sqrt{7}t$$

$$f = \frac{5\sqrt{7}}{2\pi}$$

$$f = 2,11\text{Hz}$$

Chamamos $f = 2,11\text{Hz}$ de frequência natural. O caso de amortecimento crítico e difícil de acontecer.

Até o momento consideramos $f(t) = 0$, porém quando o motor é ligado, a oscilação é obtida por sobreposição da solução homogênea com a particular, porque neste caso $f(t) \neq 0$.

Exemplo 3. Considere o motor gerando força modelada pela função $f(t) = 10\text{sen}(20\pi t)\text{N}$, ou seja, apresenta uma amplitude de 10N com frequência de 10 Hz. Para as condições iniciais adote $y(0) = 0,05\text{ m}$ e $y'(0) = 2\text{ m/s}$. Dados: $m = 5\text{kg}$, $k = 1.000\text{N/m}$ e $b = 100\text{N.s/m}$.

Primeiramente, consideramos a equação:

$$my'' + by' + ky = f(t)$$

Capítulo 6

Substituindo as informações, temos:

$$5y'' + 100y' + 1000y = 10\text{sen}(20\pi t)$$

Vamos resolver a equação acima pelo método dos coeficientes indeterminados.

Para tanto, supomos que a equação geral é dada por:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Assim, temos:

$$5y'' + 100y' + 1000y = 0$$

Dividindo os coeficientes da equação acima por 5, temos:

$$y'' + 20y' + 200y = 0$$

A seguir a equação característica:

$$\lambda^2 + 20\lambda + 200 = 0$$

$$\Delta = (20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200$$

$$\Delta = 400 - 800$$

$$\Delta = -400$$

$$\lambda = \frac{-20 \pm \sqrt{-400}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-20 + 20i}{2} = -10 + 10i$$

$$\lambda_2 = \frac{-20 - 20i}{2} = -10 - 10i.$$

Portanto:

$$y_h(t) = e^{-10t} [c_1 \cos(10t) + c_2 \text{sen}(10t)].$$

Considerando a condição inicial $y(0) = 0,05m$, temos:

$$0,05 = e^{-10 \cdot 0} [c_1 \cos(10 \cdot 0) + c_2 \text{sen}(10 \cdot 0)]$$

$$0,05 = e^0 [c_1 \cos(0) + c_2 \text{sen}(0)]$$

$$c_1 = 0,05.$$

Agora, vamos determinar a primeira derivada da equação a seguir:

$$y_h(t) = 0,05e^{-10t} \cos(10t) + c_2 e^{-10t} \text{sen}(10t)$$

$$y_h'(t) = -0,5e^{-10t} \cos(10t) + 0,5e^{-10t} \text{sen}(10t) - 10c_2 e^{-10t} \text{sen}(10t) + 10c_2 e^{-10t} \cos(10t).$$

Capítulo 6

Considerando a condição inicial $y'(0) = 2$, temos:

$$2 = -0,5e^{-10.0} \cos(10.0) + 0,5e^{-10.0} \text{sen}(10.0) - 10c_2e^{-10.0} \text{sen}(10.0) + 10c_2e^{-10.0} \cos(10.0)$$

$$2 = -0,5e^0 \cos(0) + 0,5e^0 \text{sen}(0) - 10c_2e^0 \text{sen}(0) + 10c_2e^0 \cos(0)$$

$$2 = -0,5 + 10c_2$$

$$2 + 0,5 = 10c_2$$

$$c_2 = 0,25.$$

Portanto,

$$y_h(t) = 0,05e^{-10t} \cos(10t) + 0,25e^{-10t} \text{sen}(10t).$$

Por hipótese, a solução particular é dada por:

$$y_p(t) = A \text{sen}(20\pi t) + B \cos(20\pi t)$$

Assim,

$$y'_p = A20\pi \cos(20\pi t) - B20\pi \text{sen}(20\pi t)$$

$$y''_p = -A400\pi^2 \text{sen}(20\pi t) - B400\pi \cos(20\pi t).$$

Substituindo, temos:

$$5. [A400\pi^2 \text{sen}(20\pi t) - B400\pi \cos(20\pi t)] + 100. [A20\pi \cos(20\pi t) - B20\pi \text{sen}(20\pi t)] + 1000[A \text{sen}(20\pi t) + B \cos(20\pi t)] = 10 \text{sen}(20\pi t)$$

Usando a propriedade distributiva a direita, temos:

$$A2000\pi^2 \text{sen}(20\pi t) - B2000\pi \cos(20\pi t) + A2000\pi \cos(20\pi t) - B2000\pi \text{sen}(20\pi t) + 1000A \text{sen}(20\pi t) + 1000B \cos(20\pi t) = 10 \text{sen}(20\pi t)$$

Subtraindo os termos semelhantes, temos:

$$\begin{aligned} & 2000A\pi^2 \text{sen}(20\pi t) + 1000A \text{sen}(20\pi t) - B2000\pi \text{sen}(20\pi t) \\ & + 2000A\pi \cos(20\pi t) - 2000B\pi \cos(20\pi t) + 1000B \cos(20\pi t) \\ & = 10 \text{sen}(20\pi t) \end{aligned}$$

Capítulo 6

Logo:

$$(2000A\pi^2 + 1000A - 2000B\pi) \cdot \text{sen}(20\pi t) \\ + (2000A\pi - 2000B\pi + 1000B) \cdot \text{cos}(20\pi t) = 10\text{sen}(20\pi t)$$

Igualando os coeficientes, temos:

$$\begin{cases} 2000A\pi^2 + 1000A - 2000B\pi = 10 \\ 2000A\pi - 2000B\pi + 1000B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2000\pi^2 + 1000)A - 2000B\pi = 10 \\ 2000\pi A + (-2000\pi + 1000)B = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação do sistema acima por: $-\pi - \frac{1}{\pi}$.

$$\begin{cases} (2000\pi^2 + 1000)A - 2000\pi B = 10 \\ -(2000\pi^2 + 1000)A + \left(2000\pi^2 + 2000 - 1.000\pi - \frac{1000}{\pi}\right)B = 0 \end{cases}$$

Somando as equações, temos:

$$\left(-2000\pi + 2000\pi^2 + 2000 - 1.000\pi - \frac{1000}{\pi}\right)B = 10$$

$$B = \frac{10}{-2000\pi + 2000\pi^2 + 2000 - 1.000\pi - \frac{1000}{\pi}}$$

$$B = \frac{10}{11.996,12096}$$

$$B \cong 0,00083.$$

Substituindo o valor de B, temos:

$$(2000\pi^2 + 1000)A - 2000\pi \cdot (0,00083) = 10$$

$$20.739,2088A - 5,215043805 = 10$$

$$20.739,2088A = 10 + 5,215043805$$

$$20.739,2088A = 15,21504381$$

$$A = \frac{15,21504381}{20.739,2088}$$

$$A \cong 0,00073.$$

Logo, a solução particular é dada por:

$$y_p(t) = 0,00073\text{sen}(20\pi t) + 0,00083\text{cos}(20\pi t).$$

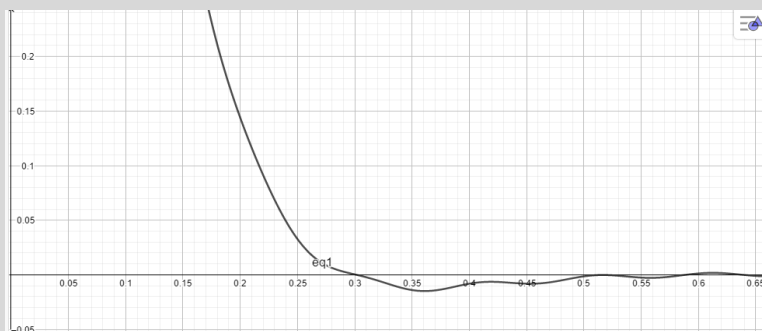
Portanto, a solução geral é:

Capítulo 6

$$y(t) = 0,05e^{-10t} \cos(10t) + 0,25e^{-10t} \text{sen}(10t) + 0,00073 \text{sen}(20\pi t) + 0,00083 \cos(20\pi t).$$

Vamos usar o programa Geogebra para representar o gráfico da função acima.

Figura 16 – Gráfico da função $y(t)$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Percebemos, na condição do exemplo 3, uma oscilação periódica, o que caracteriza o movimento **subamortecido**.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente livro, apresentamos alguns métodos de resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem para a modelagem matemática dos problemas na área da física, tais como: Queda livre; Sistema massa-mola; Pêndulo simples; Oscilador harmônico amortecido simples; Oscilador harmônico simples; Oscilador harmônico amortecido e forçado; Lei de Resfriamento de Newton; Circuito RL e RC; Decaimento radioativo; Equação da continuidade.

Além disso, mostramos algumas aplicações usando a solução geral com algumas condições iniciais. O resultado foi alcançado, uma vez que apresentamos as equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem sobre algumas condições iniciais que modelam problemas na área da física.

REFERÊNCIAS

BATISTA, Elieser; MOZOLEVSKI, Igor. **Métodos de física-matemática**. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10 ed. Rio de Janeiro, LTD, 2017.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações diferenciais**. 3. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

FERRARA, Nelson F.; PRADO, Carmen P. Cintra do. **Caos: uma introdução**. São Paulo: Edgard Blücher, 1995.

FLEMMING, Diva Marília. **TCC: curso de matemática - bacharelado**. Palhoça: UnisulVirtual, 2017.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnica de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 1999.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos de física: gravitação, ondas e termodinâmica**. v. 2. ed. 10. Rio de Janeiro: LTD, 2022.

JEWETT JUNIOR, John W.; SERWAY, Raymond A. **Física para cientistas e engenheiro**. v. 2. São Paulo, Cengage Learning, 2011.

KREYSZIG, Erwin. **Matemática superior para a engenharia**. 10. ed. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

NAGLE, Kent R.; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur D. **Equações diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

SANTOS, Cleber O. **Sistema de equações diferenciais lineares: aplicações**. Capivari de Baixo: Editora Univinte, 2022.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. v. 2. São Paulo: Pearson Makron Books, 2009.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I: mecânica**. 14. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Matemática avançada para engenharia**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.