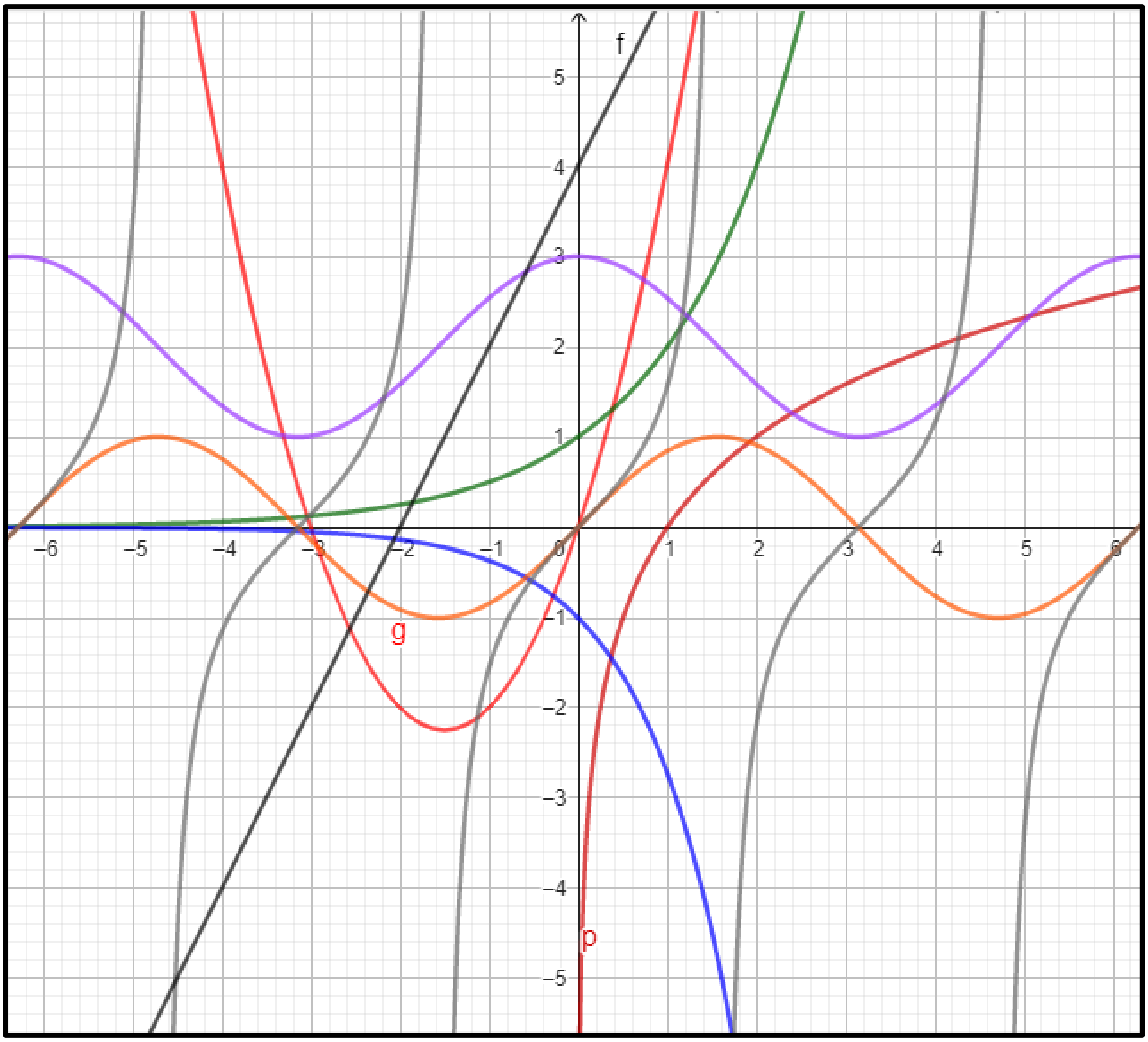
CLEBER DE OLIVEIRA DOS SANTOS



FUNÇÕES

Editora univinte

CLEBER DE OLIVEIRA DOS SANTOS

FUNÇÕES

Editora Univinte

Capivari de Baixo

2022

Editora Univinte – 2022.

Título: Funções.

Autor: Cleber de Oliveira dos Santos.

Capa: Cleber de Oliveira dos Santos.

Revisão: Do Autor.

Editoração: Andreza dos Santos.

S51s

Santos, Cleber de Oliveira.
Funções. / Cleber de Oliveira dos Santos. Capivari de Baixo: Editora Univinte, 2022.

ISBN: 978-65-87169-48-4

1. Funções. 2. Funções trigonométricas. I. Título.

CDD: 515.35

(Catalogação na fonte por Andreza dos Santos – CRB/14 866).

Editora Univinte – Avenida Nilton Augusto Sachetti, nº 500 – Santo André, Capivari de Baixo/SC. CEP 88790-000.

Editora Univinte - Publicado no Brasil – 2022.

CLEBER DE OLIVEIRA DOS SANTOS

É doutorando em Educação: Educação em Ciências/Matemática pela Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL (2022), Mestre em Educação: linha de pesquisa: Educação em Ciências/Matemática pela Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL (2017), Especialista em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC (2011), Graduado em Matemática Licenciatura - UNISUL (2005), Especialista em Educação Matemática pela UNISUL (2007), Graduado em Física Licenciatura - UNISUL (2016), Graduado em Matemática Bacharel - UNISUL (2022). Atualmente é professor das disciplinas de Cálculo II e Álgebra Linear dos Cursos de Engenharia de Produção, Civil, Mecânica e Ambiental/Sanitária do Centro Universitário Univinte. Tem experiência na área de Matemática e Física. Integrante de quatro grupos de pesquisa: GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural), TEDMAT (Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática). GEPAPe - Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Atividade Pedagógica. Analisando SDAs - Grupo de Estudos Analisando Situações Desencadeadora de Aprendizagem. Para maiores informações acessar o endereço: https://lattes.cnpq.br/9571952654134081.

APRESENTAÇÃO

O interesse da edição do livro parte da seguinte premissa, o conceito de função está presente em algumas disciplinas dos cursos de exatas e engenharias. Destaca-se, as funções: 1º e 2º grau, exponencial, logarítmica, modular e trigonométrica. Percebe-se que as resoluções dos problemas deste livro são acessíveis para estudantes e professores. Dessa forma, o livro se torna um material didático importante sobre funções para os estudantes e professores.

O livro está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo, apresenta-se a introdução, noção de função, função do 1º e 2º grau e suas aplicações. No segundo capítulo, função exponencial. No terceiro capítulo, função logarítmica. No quarto capítulo, função modular. Por fim, no quinto capítulo, funções trigonométricas.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – FUNÇÃO 8
1.1 UMA INTRODUÇÃO PARA O ESTUDO DE FUNÇÃO 8
1.2 A NOÇÃO DE FUNÇÃO 13
1.3 SOFTWARE DE GRÁFICOS DINÂMICOS 16
1.4 DEFINIÇÕES PECULIARES 16
1.5 FUNÇÃO DO 1° GRAU 22
1.6 FUNÇÃO DO 2° GRAU 31
1.7 APLICAÇÕES DE FUNÇÕES DE 1° E 2° GRAU 39
1.7.1 Função custo total 39
1.7.2 Função receita total 40
1.7.3 Função lucro total 40
1.8 FUNÇÃO POLINOMIAL 47
1.9 FUNÇÃO RACIONAL 47
1.10 CLASSIFICAÇÃO DE UMA FUNÇÃO 48
1.11 PARIDADE DE UMA FUNÇÃO 51
1.12 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES 52
1.13 FUNÇÃO INVERSA 55
CAPÍTULO 2 – FUNÇÃO EXPONENCIAL 59
2.1 POTENCIAÇÃO 59
2.2 PROPRIEDADES GERAIS SOBRE POTENCIAÇÃO 59
2.3 RADICIAÇÃO 59
2.4 PROPRIEDADES GERAIS SOBRE RADICIAÇÃO 60
2.5 EQUAÇÃO EXPONENCIAL 60
2.6 FUNÇÃO EXPONENCIAL 61
2.7 A FUNÇÃO EXPONENCIAL $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ 66
2.8 DECAIMENTO RADIOATIVO 68
CAPÍTULO 3 – FUNÇÃO LOGARÍTMICA 74
3.1 UMA BREVE HISTÓRIA 74
3.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS 79
3.3 EQUAÇÕES LOGARÍTMICA 81
3.4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA 87
CAPÍTULO 4 – FUNÇÃO MODULAR 91
4.1 DEFINIÇÃO DE MÓDULO 91
4.2 EQUAÇÕES MODULARES 93
4.3 INEQUAÇÕES MODULARES 96

4.4 FUNÇÃO MODULAR 97
CAPÍTULO 5 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.. 102
5.1 FUNÇÃO SENO 102
5.2 FUNÇÃO COSSENO 107
5.3 FUNÇÃO TANGENTE.. 113
5.4 FUNÇÃO SECANTE 116
5.5 FUNÇÃO COSSECANTE.. 117
5.6 FUNÇÃO COTANGENTE 118

CAPÍTULO 1 – FUNÇÃO

1.1 UMA INTRODUÇÃO PARA O ESTUDO DE FUNÇÃO

De acordo com Eves (2004), o matemático Gottfried Leibniz em 1694 iniciou o estudo de função. Porém, outros matemáticos também se debruçaram nos estudos ampliando a definição de função. Uma função é um caso peculiar de uma relação.

Relação é um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento do par pertence a um dos conjuntos relacionados. Nas relações não existem restrições quanto à lei de correspondência entre os elementos dos conjuntos.

Entretanto, para as funções temos restrições. O conceito de função é um dos mais importantes da matemática, pois na maioria das vezes está associada a ciência experimental. Ele está presente sempre que relacionamos duas grandezas variáveis.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2006, p.121).

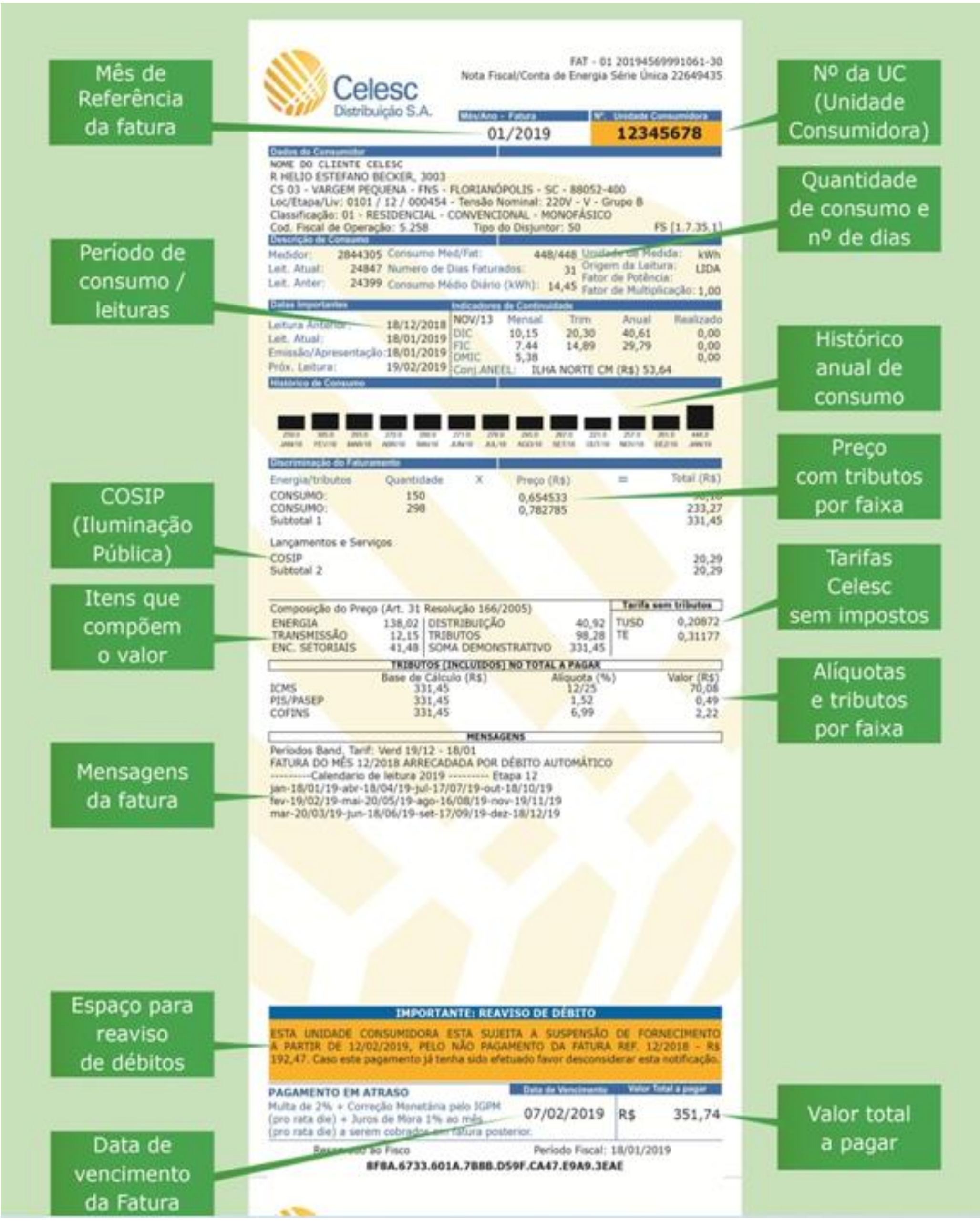
Um número qualquer usado para representar quantitativamente um fenômeno físico é chamado de grandeza física (YOUNG; FREEDMAN, 2016). A título de explicação: comprimento, massa, tempo, corrente elétrica, temperatura, área, volume, força, pressão, trabalho, energia, calor, potência, carga elétrica, resistência elétrica, velocidade, aceleração, entre outras. “Quando medimos uma grandeza, sempre a comparamos com um padrão de referência. […]. Tal padrão define uma **unidade** da grandeza” (YOUNG; FREEDMAN, 2016, p. 4, grifo do autor).

A título de explicação: o metro (m) é uma unidade de distância, o quilograma kg) é uma unidade de massa, o segundo (s) é uma unidade de tempo, o ampère (A) é uma unidade de corrente elétrica, O kelvin (K) é uma unidade de temperatura, o ohm (Ω) é uma unidade de resistência elétrica, o coulomb (C) é uma unidade de carga elétrica, o newton (N) é uma unidade de força, o joule (J) é uma unidade de trabalho, o watt (W) é uma unidade de potência elétrica (YOUNG; FREEDMAN, 2016). Além disso, o quilowatt-hora (kWh) é a unidade de medida da quantidade de energia elétrica produzida ou consumida.

A conta de energia elétrica informa todos os detalhes de relativos ao consumo e às cobranças realizadas ao cliente. Destaca-se: as datas de leitura (última, atual e próxima programada), o gráfico com histórico de consumo, a especificação das faixas de consumo, a primeira, até 150 kWh.

Na figura 1, pode-se localizar cada informação disponível na fatura de energia elétrica da Centrais Elétricas de Santa Catarina S.A (CELESC).

Figura 1 – Modelo de conta de energia elétrica



Fonte: https://www.celesc.com.br/conta-de-energia.

Quais os itens que são cobrados na fatura de energia elétrica?

A fatura de energia elétrica traz informações de todos os itens que são cobrados dos consumidores, conforme exigência realizada pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL). Destaca-se: a compra da energia gerada pelas usinas, a transmissão pelas redes de alta tensão até chegar às subestações, distribuição nas linhas de baixa e média tensão até as unidades consumidoras.

Além disso, a conta inclui encargos setoriais e tributos, como o ICMS (que se altera conforme a faixa de consumo) e PIS/Cofins (que varia mensalmente em cada estado).

Na fatura de energia elétrica, figura 1, existe uma relação entre duas grandezas, quantidade de kWh consumidos e o preço por kWh com tributos por faixa. Com base nessas informações, considerem x o consumo de energia, em kWh, e f(x) o valor pago, em reais, pelo fornecimento de energia elétrica para. Neste caso, esta relação é uma função, pois para cada kWh consumidos temos um único preço a pagar.

Dessa forma, com auxílio do professor, escreva uma lei de formação que relacione esses valores e represente o gráfico da função definida por mais de uma sentença.

Resolução:

É de conhecimento da população, que está em vigor no Brasil, o sistema de bandeiras de tarifas administrado pela ANEEL que apresenta as seguintes categorias: verde, amarela e vermelha e cinza. Essas, indicam se haverá ou não acréscimo no valor da energia a ser repassada ao consumidor final, em função das condições de geração de eletricidade.

No quadro 1, o critério de cada categoria.

Quadro 1– As diferentes características de cada categoria

Bandeira verde: condições favoráveis de geração de energia. A tarifa não sofre **nenhum acréscimo**;

Bandeira amarela: condições de geração menos favoráveis. A tarifa sofre acréscimo de **R$ 1,874** para cada **100 kWh** (quilowatts-hora) consumidos.

Bandeira vermelha - Patamar 1: condições mais custosas de geração. A tarifa sofre acréscimo de **R$ 3,971** para cada **100 kWh** (quilowatts-hora) consumidos.

Bandeira vermelha - Patamar 2: condições ainda mais custosas de geração. A tarifa sofre acréscimo de **R$ 9,492** para cada **100 kWh** (quilowatts-hora) consumidos**.**

Bandeira escassez hídrica: criada para custear os custos excepcionais do acionamento de usinas térmicas e da importação de energia. Irá vigorar até abril de 2022. A tarifa sofre acréscimo de **R$ 14,20** para cada **100 kWh** (quilowatts-hora) consumidos.

Fonte: https://www.celesc.com.br/bandeiras-tarifarias.

Para dicas de como economizar energia acesse o QR Code a seguir.

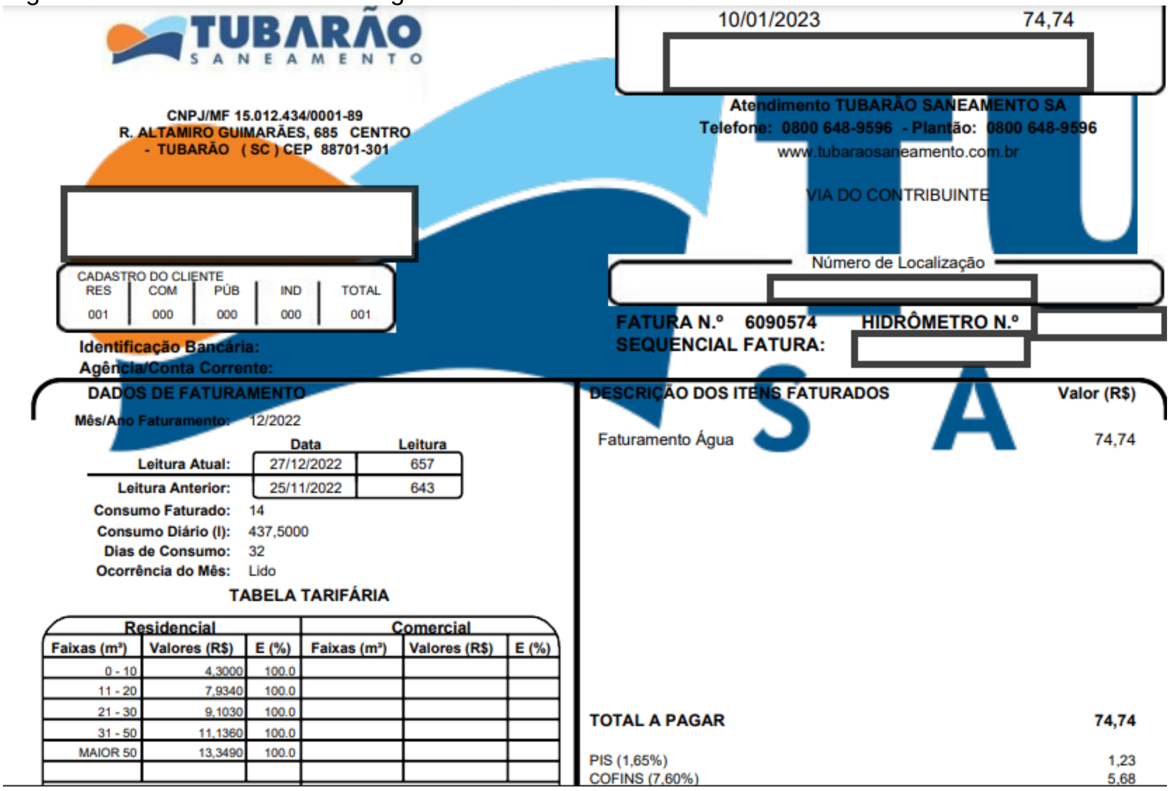
Figura 2 – QR Code para acesso das dicas de economia de energia

Fonte: https://www.celesc.com.br/conta-de-energia.

Na cidade de Tubarão – SC, a tarifa de água nas residências é estabelecida de acordo com a faixa de consumo.

Observe na fatura a seguir, figura 3, em tabela tarifária.

Figura 3 – Modelo de fatura de água da Tubarão Saneamento SA



TUBARÃO SANEAMENTO

10/01/2023 74,74

CNPJ/MF 15.012.434/0001-89
R. ALTAMIRO GUIMARÃES, 685 CENTRO
- TUBARÃO (SC) CEP 88701-301

Atendimento TUBARÃO SANEAMENTO SA
Telefone: 0800 648-9596 - Plantão: 0800 648-9596
www.tubaraosaneamento.com.br

VIA DO CONTRIBUINTE

CADASTRO DO CLIENTE

RES	COM	PÚB	IND	TOTAL
001	000	000	000	001

Número de Localização

FATURA N.º 6090574 HIDRÔMETRO N.º
SEQUENCIAL FATURA:

Identificação Bancária:
Agência/Conta Corrente:

DADOS DE FATURAMENTO

Mês/Ano Faturamento: 12/2022

	Data	Leitura
Leitura Atual:	27/12/2022	657
Leitura Anterior:	25/11/2022	643

Consumo Faturado: 14
Consumo Diário (l): 437,5000
Dias de Consumo: 32
Ocorrência do Mês: Lido

TABELA TARIFÁRIA

Residencial			Comercial		
Faixas (m³)	Valores (R$)	E (%)	Faixas (m³)	Valores (R$)	E (%)
0 - 10	4,3000	100,0			
11 - 20	7,9340	100,0			
21 - 30	9,1030	100,0			
31 - 50	11,1360	100,0			
MAIOR 50	13,3490	100,0			

DESCRIÇÃO DOS ITENS FATURADOS	Valor (R$)
Faturamento Água	74,74
TOTAL A PAGAR	74,74
PIS (1,65%)	1,23
COFINS (7,60%)	5,68

Fonte: https://tubaraosaneamento.com.br/conheca_fatura.

Considere a tabela tarifária, e determine:

(a) a lei de formação da função $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que associa o valor cobrado (v(x)), em reais, ao consumo mensal de água (x), em metros cúbicos.

(b) O gráfico da função v.

Para conhecer os itens de sua fatura de água acesse o QR Code a seguir.

Figura 4 – QR Code para acesso dos itens da fatura de água

Fonte: https://tubaraosaneamento.com.br/conheca_fatura.

Resolução:

1.2 A NOÇÃO DE FUNÇÃO

De acordo com Stewart (2009, p. 3): “As funções surgem quando uma quantidade depende de outra.

Exemplo 1.1: A área de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona o raio r e área A é dado por: $A = \pi r^2$. A cada número $r > 0$ existe associado um único valor da área. Denomina-se, A é uma função de r.

Exemplo 1.2: A figura a seguir, representa o boleto de cobrança da mensalidade de um curso da universidade Y, referente ao mês de setembro de 2022.

Quadro 2 – Boleto da mensalidade

BANCO X	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	Vencimento 10/09/2022
Cedente Universidade Y	Agência/código cedente
Data documento 01/09/2022	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 1350,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 20,00 mais 50 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor cobrado

Fonte: elaborada pelo autor (2022).

Resolução:

Se $V(x)$ é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então a lei que relaciona o número de dias em atraso e o valor a pagar é dada por: $V(x) = 1370 + 0{,}5x$.

Exemplo 1.3: Um posto de combustível vende o litro de gasolina por R$ 5,00. Considere as informações no quadro 3, que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar (informações coletadas em dezembro de 2022).

Quadro 3 – Relação entre número de litros de gasolina e preço a pagar

Número de litros de gasolina	Preço a pagar
0	0
1	5
2	10
3	15
. . .	. . .
x	y

Fonte: elaborada pelo autor (2022).

Resolução:

Observe que o preço a pagar é dado em função do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar depende do número de litros comprados. Preço a pagar é igual a R$ 5,00 vezes o número de litros comprados. Assim, a função que modela o preço pago pelo combustível é determinada por P de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dada pela lei da função $P(x) = 5x$ (fórmula matemática da função). Neste caso, $P(x)$ é o preço a pagar (variável dependente[1]) e x a quantidade de litros comprados (variável independente).

Dois proprietários de veículos (carro) abasteceram seus automóveis. O primeiro, abasteceu 10 litros, o segundo, 15 litros. Nessas condições, quanto cada um pagou?

Exemplo 1.4: Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e a altura h, em metro, varia em função do tempo t, em segundo, após o lançamento. Considere a lei da função $h(t) = 30t - 5t^2$, responda:

(a) Qual é a altura do objeto 3 segundos após o lançamento?

(b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura? Use a fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Resolução:

[1] "O símbolo que representa um número arbitrário no *domínio* de uma função f é denominado **variável independente**, e o que representa um número qualquer na *imagem* de f é chamado de **variável dependente**" (STEWART, 2009, p. 3, grifo do autor).

1.3 SOFTWARE DE GRÁFICOS DINÂMICOS

Dos diversos softwares para representar gráficos, está disponível o endereço eletrônico bem como o QR Code para o acesso gratuito de dois softwares, o GeoGebra e o Graph Plotter respectivamente.

Figura 5 – QR Code para acessar o software GeoGebra

Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.

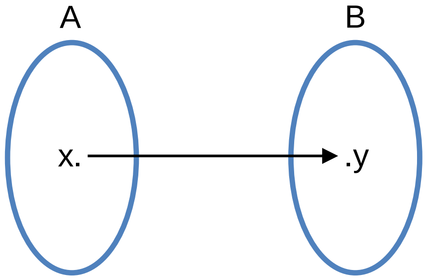
Figura 6 – QR Code para acessar o software Graph Plotter

Fonte: https://www.transum.org/Maths/Activity/Graph/Desmos.asp.

1.4 DEFINIÇÕES PECULIARES

Definição 1.1 Dados dois conjuntos não vazios A e B, dizemos que f é uma função, do conjunto A em um conjunto B, se e somente se, todo elemento de A está em correspondência com um único elemento de B. Usamos a seguinte notação: $f : A \rightarrow B \; ou \; A \xrightarrow{f} B$, que se lê: f é uma função de A em B definida por $y = f(x)$, onde y é o valor de f em x.

Figura 7 – A função f transforma x de A em y de B



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Definição 1.2 Domínio de uma função é o conjunto dos valores de x tais que a função está definida. Denotamos por $D(f\ ) = A$ ou $Dom(f\ ) = A$.

Definição 1.3 Contradomínio de uma função é o conjunto B e denotamos por $CD(f\ ) = B$.

Definição 1.4 Imagem de uma função é o conjunto dos valores $y \in B$ tais que $y = f(x)$ para algum x e denotamos por $Im(f) \subseteq B$.

De acordo com as definições 1.2 e 1.4, temos: $D(f) = \{x \in A \mid y = f(x)$ para algum $y \in B\}\ e\ Im(f) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A\ com\ y = f(x)\}$.

Exemplo 1.5: Seja $f: A \to B$ definida por $f(x) = 3x$, onde $A = \{1, 2, 3\}\ e\ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determine o $D(f\ )$, $CD(f\ )$ e $Im(f\ )$.

Resolução:

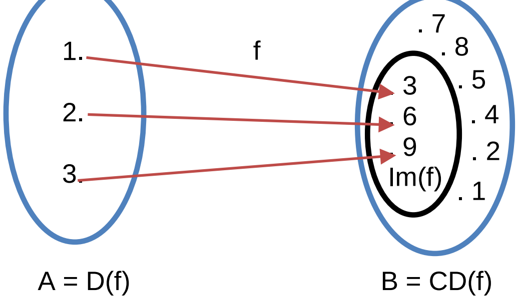
Neste caso temos:

$$D(f) = \{1,2,3\}$$

$$CD(f) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$Im(f) = \{3,6,9\}$$

Figura 8 – A representação da função f no diagrama de fechas



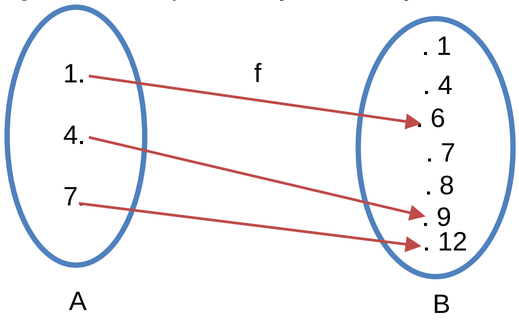
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita função real de uma variável real se $A \subset \mathbb{R}\, e\, B \subset \mathbb{R}$.

Exemplo 1.6: Dados $A = \{1, 4, 7\}\, e\, B = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 12\}$ a função $f : A \rightarrow B$ é definida por $f(x) = x + 5$ que também pode ser representada por $y = x + 5$.

Resolução:

Figura 9 – A representação da função f no diagrama de fechas



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Resolução:

Neste caso temos: O domínio $D(f) = \{1, 4, 7\}$, o contradomínio $CD(f) = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 12\}$ e o conjunto imagem $Im(f) = \{6, 9, 12\}$, além disso, sabemos que: a imagem do ponto $x = 1$ é $y = 6$, indicado por $f(1) = 6$; a imagem do ponto $x = 4$ é $y = 9$, indicado por $f(4) = 9$; a imagem do ponto $x = 7$ é $y = 12$, indicado por $f(7) = 12$.

Exemplo 1.7: Vamos considerar a função $f : N \rightarrow N$ definida por $f(x) = x + 1$. Determine o $D(f), CD(f)\, e\, Im(f)$.

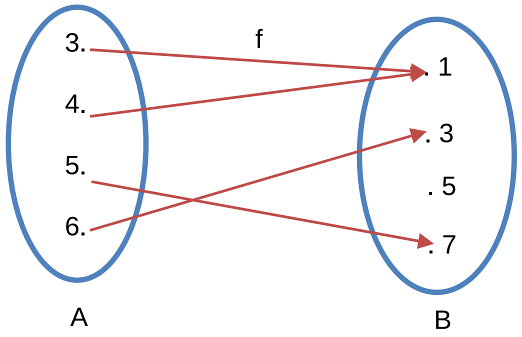
Resolução:

Quando $x = 0$, temos: $f(0) = 1$; quando $x = 1$ temos: $f(1) = 2$; quando $x = 2$ temos: $f(2) = 3$, e assim por diante.

Assim, podemos notar que: O domínio de f é dado por: $D(f) = N$, o contradomínio de f é dado por $CD(f) = N$ e o conjunto imagem de f é dado por $Im(f) = N^* = N - \{0\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Considere a função $f : A \to B$ dada pelo diagrama abaixo e determine:



(a) D(f).

(b) Im(f).

(c) f(4).

(d) y, quando x = 5.

(e) x, quando y = 3.

(f) x, quando f(x) = 1.

(g) f(x), quando x = 6.

(h) y, quando x = 3.

(i) x, quando y = 7.

(2) Considere $g : A \to B$ a função para a qual $A = \{1, 3, 4\}, B = \{3, 9, 12\}$ e $g(x)$ é o triplo de x, para todo.

(a) Construa o diagrama de flechas da função.

(b) Determine D(g), CD (g) e Im(g).

(c) Determine g(3).

(d) Determine x para o qual g(x) = 12.

Gráficos de uma função

Definição 1.5 O gráfico de uma função $f : A \to B$, dada por $y = f(x)$, é o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas no sistema cartesiano retangular são dadas por $(x, f(x))$, onde $x \in A$.

Para construir o gráfico de uma função dada por y = f(x), com $x \in D(f)$, no plano cartesiano, devemos:

• Construir uma tabela com valores de x escolhidos convenientemente no domínio D(f) e com valores correspondentes para y = f(x).

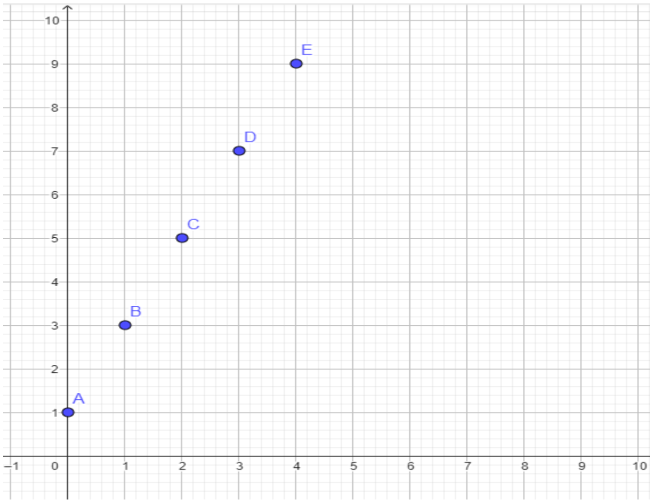
• A cada par ordenado (x, y) da tabela associar um ponto do plano cartesiano.

• Marcar um número suficiente de pontos até que seja possível esboçar o gráfico da função.

Exemplo 1.8: Vamos construir o gráfico da função dada por $f(x) = 2x + 1$, sendo o domínio $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Resolução:

x	y = f(x) = 2x + 1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

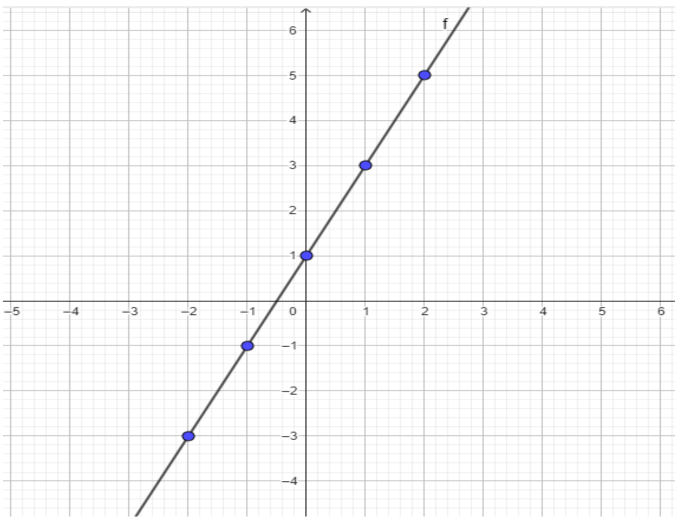


Nesse caso, o gráfico da função é o conjunto dos pontos A, B, C, D e E.

Exemplo 1.9: Vamos construir o gráfico da função $f : R \to R$ dada por $f(x) = 2x + 1$. Como, neste caso, $D = R$, vamos escolher alguns valores arbitrários de x, conforme a tabela a seguir.

Resolução:

x	y = f(x) = 2x + 1
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

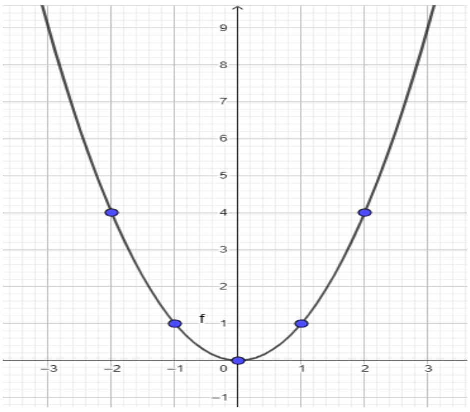


Agora, o gráfico é o conjunto de todos os pontos (x, y), com x real e y = 2x + 1, resultando na reta.

Exemplo 1.10: Vamos construir o gráfico da função $f : R \to R$, tal que $f(x) = x^2$.

Resolução:

x	y = f(x) = x^2	(x, y)
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Uma livraria vende uma revista por R$ 5,00 a unidade. Seja x a quantidade vendida.

(a) Obtenha a função receita R(x).

(b) Calcule R(40).

(c) Qual a quantidade que deve ser vendida para dar uma receita igual a R$ 700,00?

(2) Dada à função f(x) = 7x - 3, com D = R, obtenham:

(a) f(2).

(b) f(0).

(c) f(-1).

(d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(e) $f(\sqrt{2})$.

(3) Dada à função f(x) = 2x - 3 obtenham:

(a) o valor de x tal que f(x) = 49.

(b) o valor de x tal que f(x) = -10.

(4) Construa o gráfico da função $f : R \to R$, tal que $f(x) = x + 2$.

(5) Construa o gráfico da função $f : R \to R$, tal que $f(x) = -x^2$.

(6) Dada à função $f(x) = x^2 - 4x + 10$ obtenha os valores de x cuja imagem seja 7.

1.5 FUNÇÃO DO 1° GRAU

Definição 1.6 Chama-se função polinomial do 1º grau, ou função afim, a qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais dados e $a \neq 0$.

Na função $f(x) = ax + b$, o número real a é chamado de coeficiente angular e o número b é chamado coeficiente linear. A função é uma reta não paralela aos eixos coordenados. O domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.11: Abaixo alguns exemplos de funções polinomiais do 1° grau.

(a) $f(x) = 5x - 3$, onde $a = 5 \; e \; b = -3$.
(b) $f(x) = -2x - 7$, onde $a = -2 \; e \; b = -7$.
(c) $f(x) = 11x$, onde $a = 11 \; e \; b = 0$.

Casos particulares da função do 1° grau

Função Linear

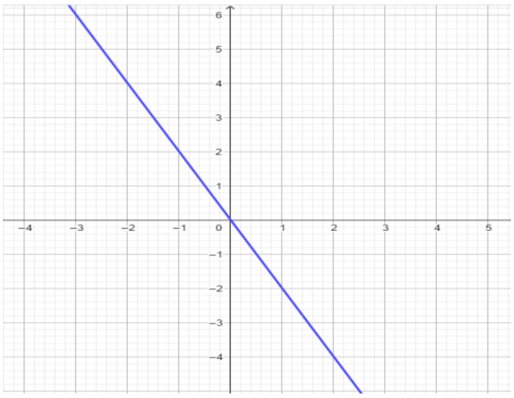
Seja $f : R \to R$ definida por f(x) = ax para todo $x \in R$. Neste caso, b = 0.

Exemplo 1.12: Abaixo alguns exemplos de função linear.

(a) $f(x) = -2x$, onde $a = -2$.
(b) $f(x) = \frac{1}{5} x$, onde $a = \frac{1}{5}$.

A seguir, figura 10, o gráfico de uma função linear.

Figura 10 – Gráfico da função linear f(x) = -2x



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Função Constante

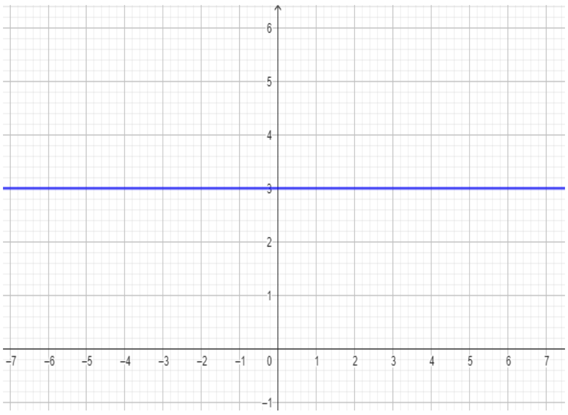
Seja $f : R \to R$ definida por f(x) = b para todo $x \in R$. Neste caso, a = 0.

Exemplo 1.13: Abaixo alguns exemplos de função constante.

(a) $f(x) = 3$.
(b) $f(x) = -2$.
(c) $f(x) = \frac{1}{3}$.

A seguir, figura 11, o gráfico de uma função constante.

Figura 11 – Gráfico da função constante f(x) = 3

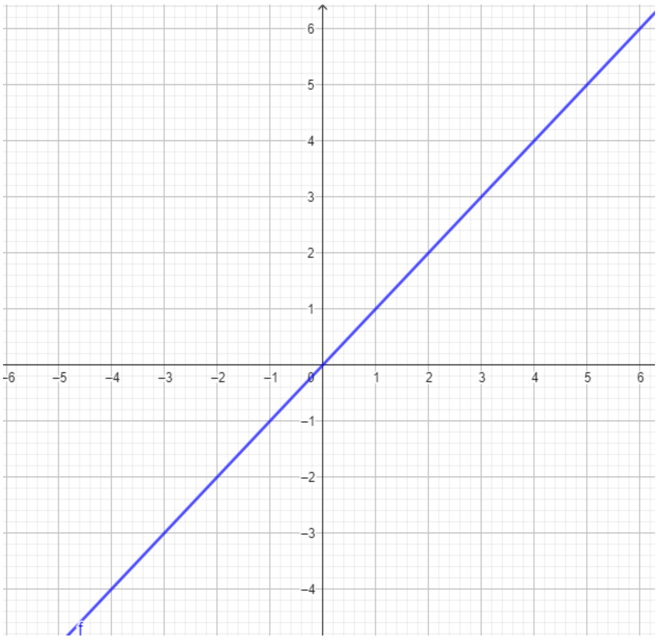


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Função identidade

Seja $f: R \to R$ definida por f(x) = x para todo $x \in R$, com a = 1 e b = 0. A seguir, figura 12, o gráfico da função identidade.

Figura 12 – Gráfico da função identidade f(x) = x



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Gráfico da função do 1° grau

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, f(x) = ax + b, $a \neq 0$, com domínio e contradomínio $\mathbb{R}$ é uma reta que intercepta os eixos coordenados Ox e Oy nos pontos $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ e $(0, \mathrm{b})$, respectivamente.

Exemplo 1.14: Vamos construir o gráfico da função $y = 2x - 4$.

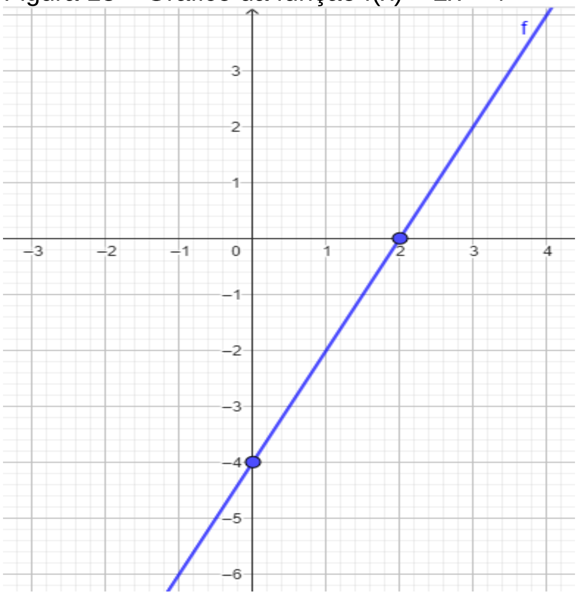
Resolução:

• Para $x = 0$, temos: $y = 2 \cdot 0 - 4 = -4$. Assim, um ponto é (0, – 4).

• Para $y = 0$, temos: $0 = 2x - 4 \to x = 2$. Assim, outro ponto é (2,0).

Marcando os pontos $(0, -4)$ e $(2, 0)$ no plano cartesiano e traçando a reta passando pelos dois pontos, obtemos o gráfico da função, conforme figura 13.

Figura 13 – Gráfico da função f(x) = 2x – 4



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Zero da função

Chama-se zero ou raiz da função polinomial do 1º grau f(x) = ax + b, $a \neq 0$, o número real x tal que f(x) = 0.

Assim, $f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Exemplo 1.15: Obtenção do zero da função de $f(x) = 2x - 5$.

Resolução:

Fazendo, $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

Exemplo 1.16: Cálculo da raiz da função $g(x) = 3x + 6$.

Resolução:

Fazendo, $g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Exemplo 1.17: Cálculo da abscissa do ponto em que o gráfico de $h(x) = -2x + 10$ corta o eixo das abscissas.

Resolução:

O ponto em que o gráfico intercepta o eixo dos x é aquele em que $h(x) = 0$; então: $h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Crescimento e decrescimento

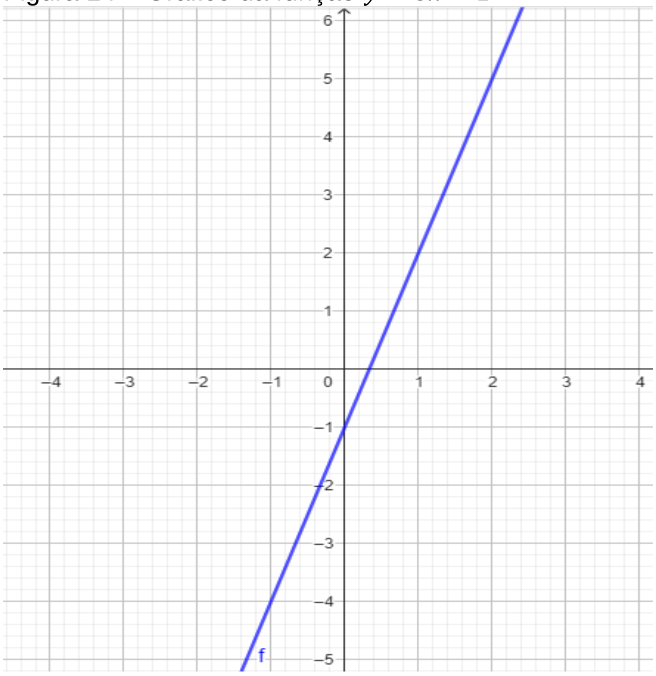
Exemplo 1.18: Consideremos a função do 1º grau $y = 3x - 1$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:

Resolução:

x	y
-3	-10
-2	-7
-1	-4
0	-1
1	2
2	5
3	8

Note que, quando aumenta o valor de x, os correspondentes valores de y também aumentam. Dizemos, que a função $y = 3x - 1$ é crescente. A seguir, o gráfico da função.

Figura 14 – Gráfico da função $y = 3x - 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

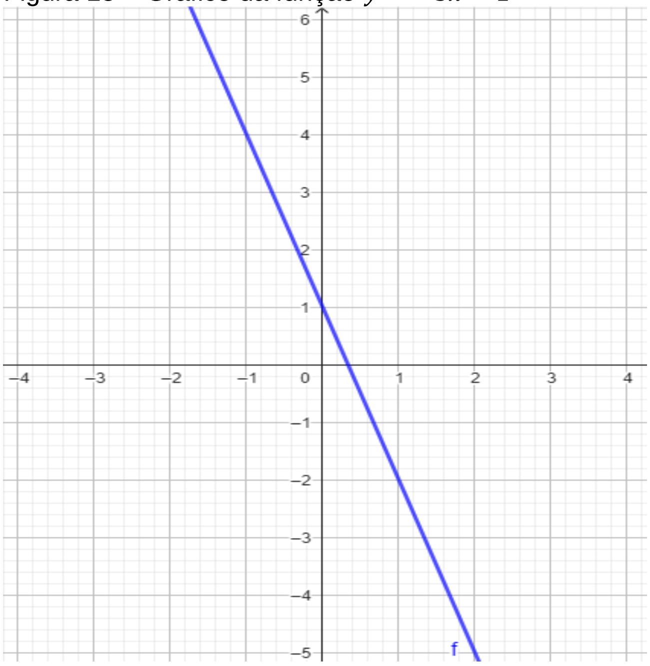
Exemplo 1.19: Consideremos a função do 1º grau $y = -3x + 1$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:

Resolução:

x	y
-3	10
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5
3	-8

Note que, quando aumenta o valor de x, os correspondentes valores de y diminuem. Dizemos, que a função $y = -3x + 1$ é decrescente. A seguir, o gráfico da função.

Figura 15 – Gráfico da função $y = -3x - 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Regra geral:

- A função do 1º grau f(x) = ax + b é crescente quando o coeficiente de x é positivo (a > 0).

- A função do 1º grau f(x) = ax + b é decrescente quando o coeficiente de x é negativo (a < 0).

Sinal da função do 1° grau

Estudar o sinal de uma função y = f(x) é determinar os valores de x para:

(a) y positivo;

(b) y igual a zero;

(c) y negativo.

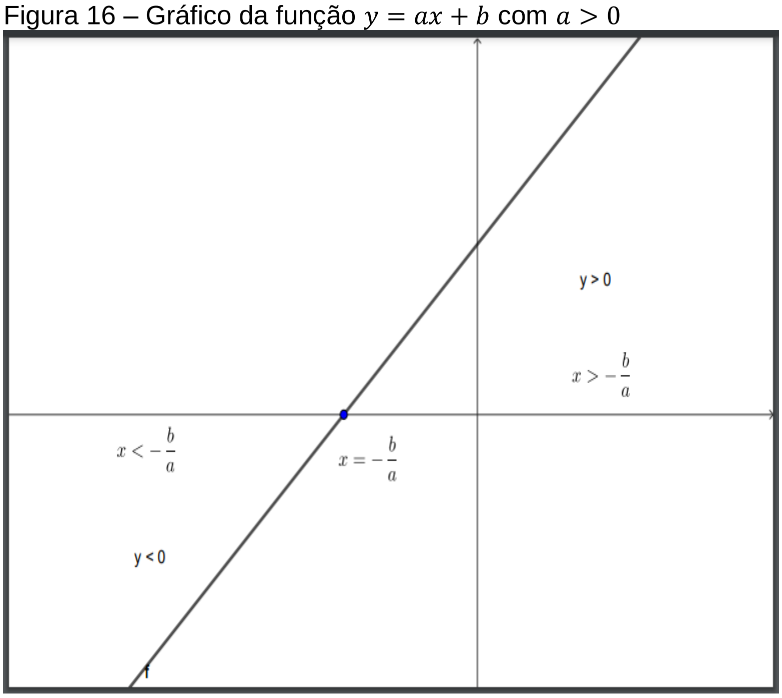
Considere a função $f(x) = ax + b$. Primeiramente, para estudar o sinal da função, $f(x) = 0$. Dessa forma, $x = -\frac{b}{a}$.

(1°) $a > 0$ (a função é crescente)

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}.$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}.$$

Figura 16 – Gráfico da função $y = ax + b$ com $a > 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Conclusão:

(i) y é positivo para valores de x maiores que a raiz;

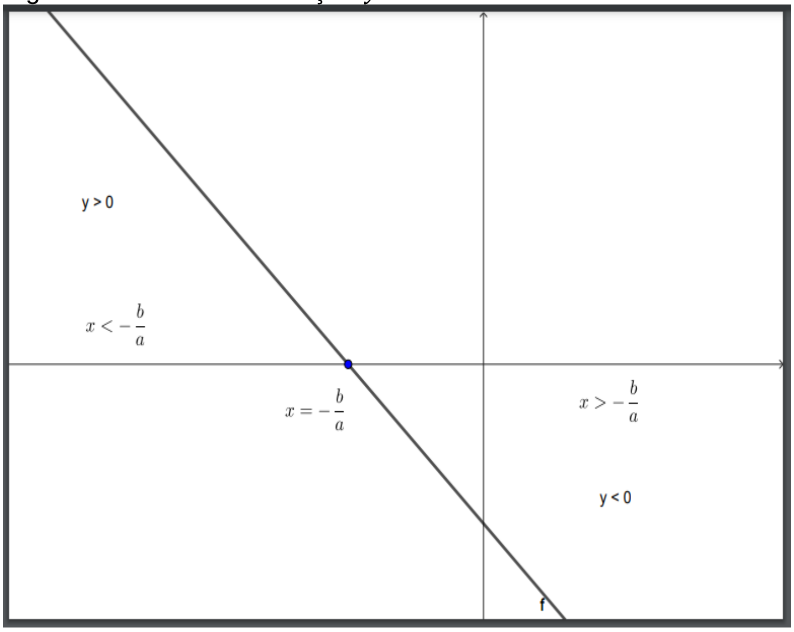
(ii) y é negativo para valores de x menores que a raiz.

(2°) $a < 0$ (a função é decrescente)

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}.$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}.$$

Figura 17 – Gráfico da função $y = ax + b$ com $a < 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Conclusão:

- y é positivo para valores de x menores que a raiz;
- y é negativo para valores de x maiores que a raiz.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) O custo total de produção de um determinado produto é representado pela função $C(x) = 5x + 20$, em que C é o custo em reais e x, o número de unidades produzidas.

Determine:

(a) O custo de fabricação de 20 unidades.

(b) Quantas unidades devem ser produzidas para que o custo seja de R$3.000,00.

(2) Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes, uma fixa no valor de R$ 2.000,00, e uma variável, que corresponde a uma comissão de 2% do total de vendas que ele fez durante o mês.

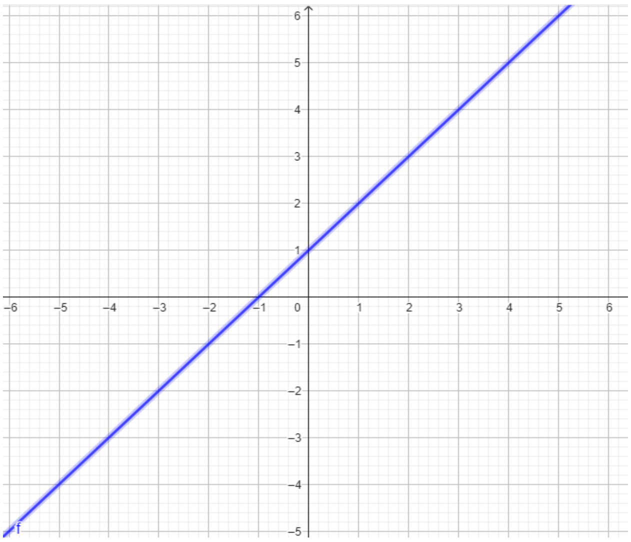
(a) Expresse a função que representa o salário mensal dele.

(b) Calcule o salário sabendo que durante o mês ele vendeu R$100.000,00 em produtos.

(3) O lucro de uma indústria que vende um único produto é dado pela fórmula matemática $\mathrm{L(x)} = 4\mathrm{x} - 1.000$, em que L representa o lucro e x, a quantidade de produto vendido. Determine a quantidade mínima de produtos que devem ser vendidos para que haja lucro.

(4) Dada à função f(x) = ax + b, sabe-se que f(1) = 5 e f(3) = 7. Determine a função f e calcule a f(2).

(5) Escrever a função $f(x) = ax + b$ com $a > 0$, cujo gráfico, num sistema cartesiano, é dado pela figura abaixo:



(6)

EMPRESA X CONTRATA ENGENHEIROS 5 vagas para estudantes de Engenharia Salário mensal: R$ 4.000 fixo + comissão de R$ 1,00 por m² produzido

Na primeira etapa da seleção para as vagas deste anúncio, foi proposta a seguinte questão a ser resolvida pelos candidatos. Calcular o salário no primeiro mês, para a produção de 800 m de comprimento de chapa retangular (aço inox) com 2 m de largura. Além disso, calcular o salário no segundo mês, se triplicar a produção do comprimento mantendo a largura. Acertaram a questão aqueles que responderam, respectivamente:

(a) R$ 5.600,00 e R$ 8.800,00.

(b) R$ 6.500,00 e R$ 8.000,00.

(c) R$ 4.500,00 e R$ 6.200,00.

(d) R$ 4.600,00 e R$ 9.200,00.

(e) n.d.a.

(7) Represente o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = x + 3$.

(b) $f(x) = 2x - 4$.

(c) $f(x) = -3x + 6$.

(d) $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

(8) Estude os sinais das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x - 1$.

(b) $f(x) = x + 2$.

(c) $f(x) = -x + 1$.

(d) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

1.6 FUNÇÃO DO 2° GRAU

Definição 1.7 Chama-se função do 2° grau, a qualquer função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.20:

(a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $(a = 2, b = 3, c = -5)$.

(b) $f(x) = -x^2 + 4x$ $(a = -1, b = 4, c = 0)$.

(c) $f(x) = -3x^2 + 5$ $(a = -3, b = 0, c = 5)$.

(d) $f(x) = x^2 (a = 1, b = 0, c = 0)$.

O gráfico de uma função do 2° grau definida de ℝ em ℝ é uma parábola. A concavidade da parábola é determinada pelo sinal de a (coeficiente de x^2).

Assim, quando:

- $a > 0$ (parábola com concavidade para cima);
- $a < 0$ (parábola com concavidade para baixo).

O ponto de intersecção do gráfico com o eixo y possui coordenadas (0,c). Para determinar o ponto de intersecção do gráfico com o eixo x, temos que encontrar se possível o(s) valor(es) de x (chamado zero da função) que o gráfico intercepta o eixo das abscissas.

Dessa forma, considere $f(x) = 0$. Em seguida, escrevemos a equação do 2° grau, $ax^2 + bx + c = 0$. Usando a fórmula de Bhaskara[2], temos três casos possíveis.

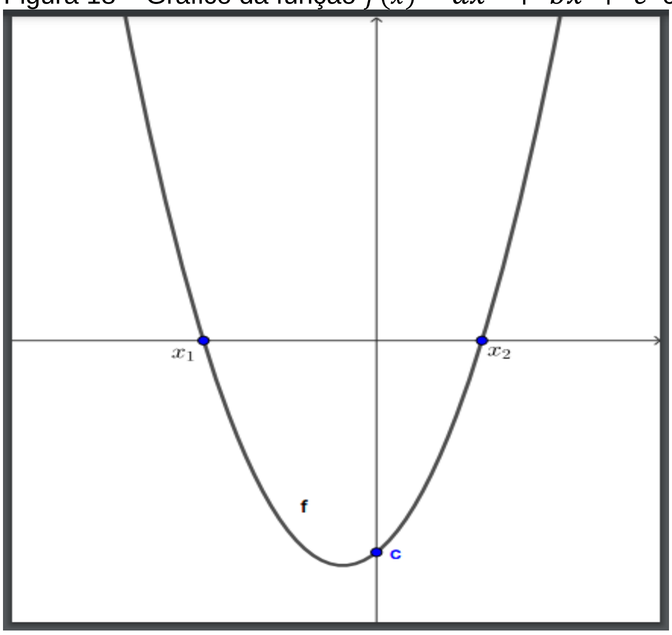
1º caso: Se $\Delta > 0$, temos duas raízes reais distintas, $x_1 \neq x_2$;

2º caso: Se $\Delta = 0$, temos $x_1 = x_2$;

3º caso: Se $\Delta < 0$, não temos raízes reais, $x_1 \; e \; x_2 \notin \mathbb{R}$.

A título de explicação 1, considere $a > 0$ e $\Delta > 0$. Dessa forma, temos a concavidade voltada para cima e duas raízes reais distintas, $x_1 \neq x_2$, conforme o gráfico a seguir.

Figura 18 – Gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$ e $\Delta > 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

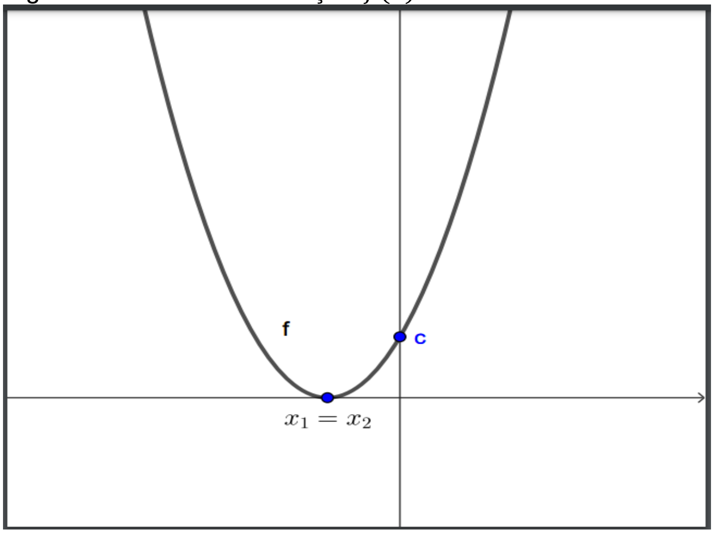
---

[2] $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$ sendo $\Delta = b^2 - 4.a.c$.

Logo, os pontos de intersecção da função com o eixo x é dado por $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

A título de explicação 2, considere $a > 0$ e $\Delta = 0$. Dessa forma, temos a concavidade voltada para cima e duas raízes reais iguais, $x_1 = x_2$, conforme o gráfico a seguir.

Figura 19 – Gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$ e $\Delta = 0$

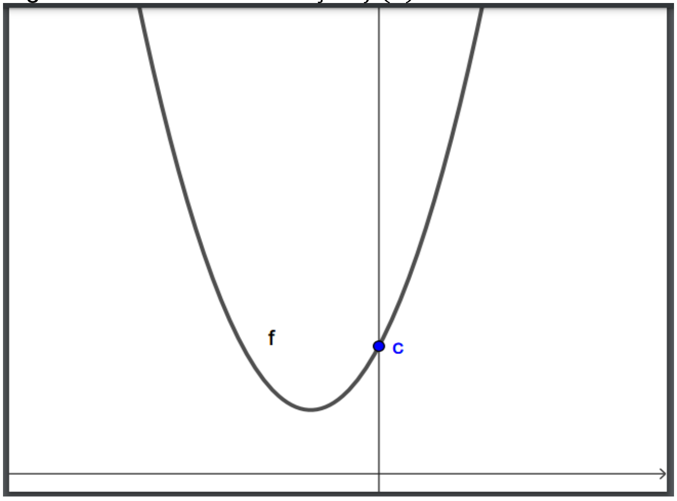


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Logo, o ponto de intersecção da função com o eixo x é dado por $(x, 0)$.

A título de explicação 3, considere $a > 0$ e $\Delta < 0$. Dessa forma, temos a concavidade voltada para cima com nenhuma raiz real, $x_1 \; e \; x_2 \notin \mathbb{R}$, conforme o gráfico a seguir.

Figura 20 – Gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$ e $\Delta < 0$

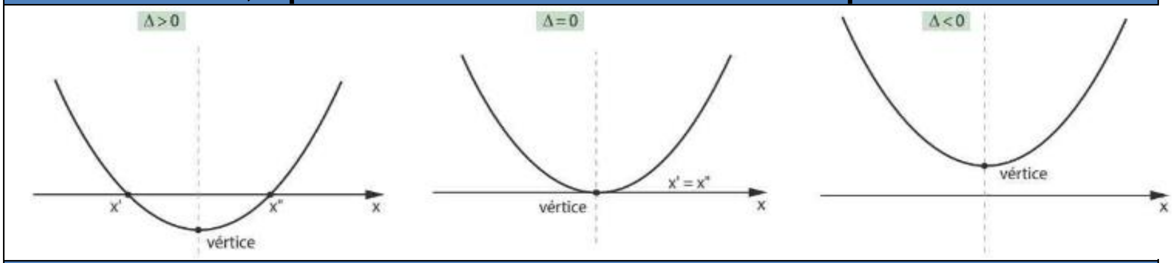


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

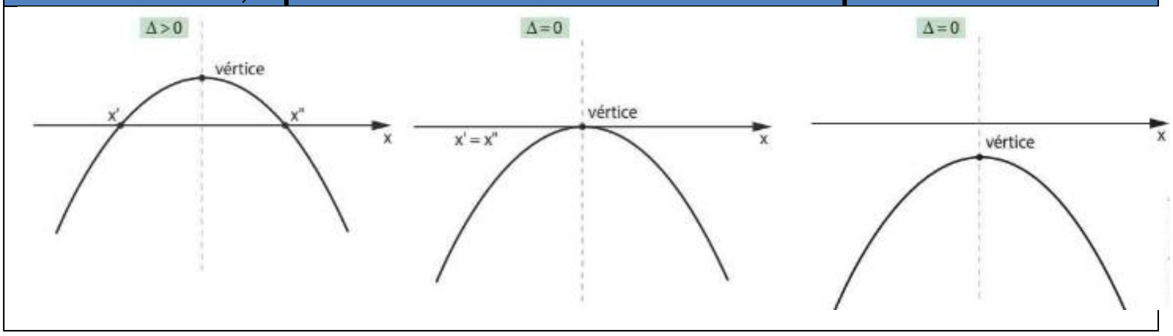
Logo, não temos ponto de intersecção da função com o eixo x. Apresentamos a seguir, no quadro 4, as possibilidades de representação dos gráficos de acordo com os valores do coeficiente a e do discriminante Δ.

Quadro 4 – Características da representação gráfica de uma função do 2º grau

$a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima



$a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo



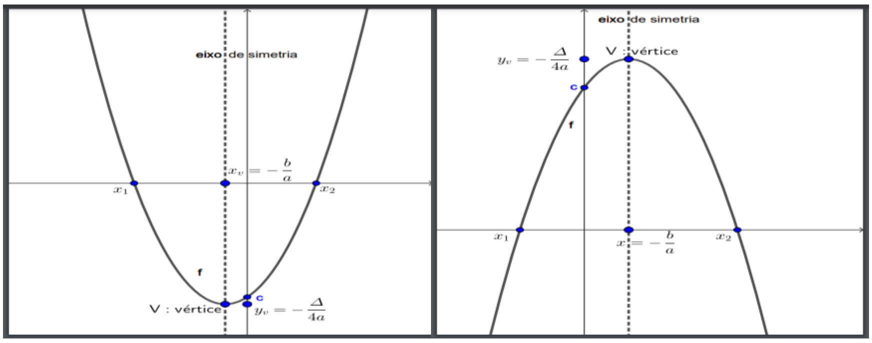
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Estudo do vértice da parábola

A parábola que representa a função do 2° grau é dividida em duas partes simétricas. Essa divisão é feita por um eixo chamado de eixo de simetria. A intersecção desse eixo com a parábola recebe o nome de vértice da parábola.

- O vértice é o ponto de máximo da parábola se $a < 0$;
- O vértice é o ponto de mínimo da parábola se $a > 0$.

Figura 21 – Gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Coordenadas do vértice da parábola

As coordenadas do vértice são calculadas por: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Imagem da função do 2º grau

A imagem de uma função é a projeção de seu gráfico sobre o eixo y. Na figura 20, podemos perceber que y_v (ordenada do vértice) é um dos extremos da imagem.

Assim, podemos ter dois casos:

Se $a > 0$, então $Im = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.

Se $a < 0$, então $Im = \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

Crescimento e decrescimento de uma função quadrática

O x_v da coordenada do vértice da parábola evidencia os intervalos onde a função é crescente e decrescente. Observe o comportamento das duas partes do gráfico determinadas pelo eixo de simetria da parábola, figura 20.

- Para valores reais de x tais que $x < xv$, temos: $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$ (função decrescente).
- Para valores reais de x tais que $x > xv$, temos: $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$ (função crescente).

Exemplo 1.21: considere a função $y = x^2 - 2x - 3$.

Determine:

(a) a concavidade da parábola;

(b) as raízes da função do 2º grau;

(c) a coordenadas do vértice;

(d) o domínio da função;

(e) o conjunto imagem da função;

(f) intervalo de decrescimento e crescimento;

(g) o gráfico da função.

Resolução:

(a) $a > 0 \Rightarrow$ concavidade para cima.

(b) Fazendo $x^2 - 2x - 3 = 0$, temos: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

(c) $\Delta = 16 > 0 \Rightarrow x_v = 1$, $y_v = -4$, ou seja, $V = (1, -4)$.

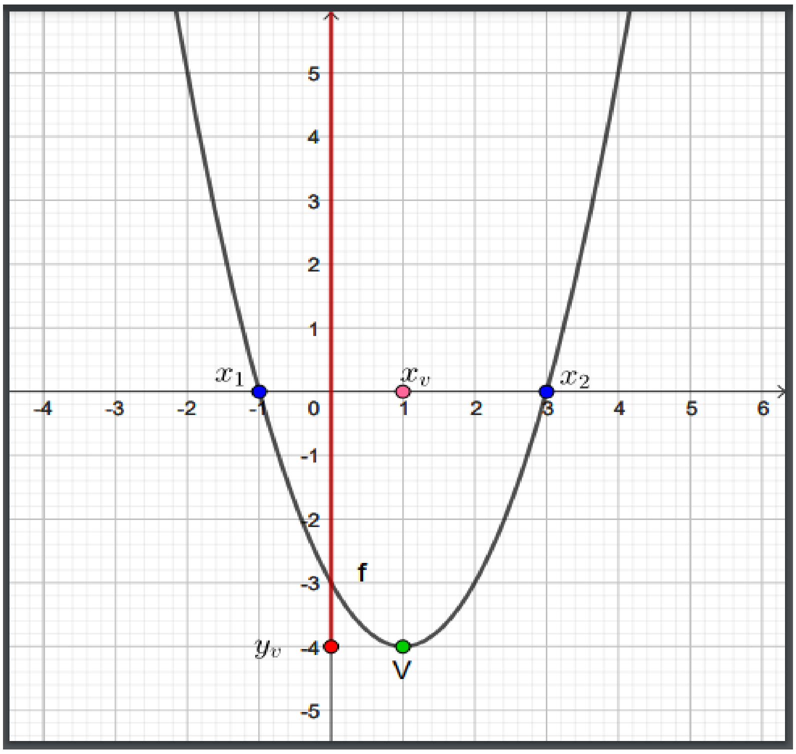
(d) $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

(e) $\mathrm{Im} = [-4, +\infty[$.

(f) Temos os seguintes casos:

- f(x) é decrescente para $\{x \in \mathbb{R}/x < 1$ ou $]-\infty, 1[$.
- f(x) é crescente para $\{x \in \mathbb{R}/x > 1$ ou $]1, +\infty[$.

(g)



Para qualquer função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, usando a técnica de completar quadrados, podemos escrever:

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Sendo (x_v, y_v) o vértice da parábola. Dessa forma, o eixo de simetria é dado por $x = x_v$.

Exemplo 1.22: Considere a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Determine, o vértice e o eixo de simetria.

Resolução:

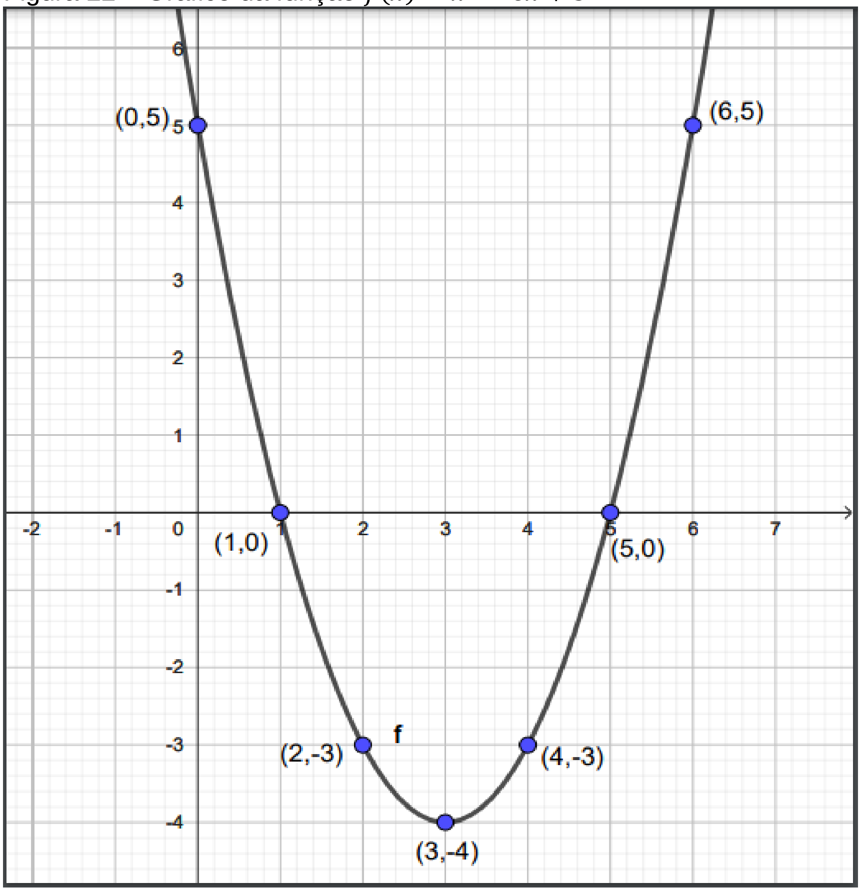
$$y = (x^2 - 6x) + 5$$
$$y = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5$$
$$y = (x - 3)^2 - 4$$

O vértice da parábola é $(x_v, y_v) = (3, -4)$ e o eixo de simetria é $x = 3$.

É conveniente escrever a função do 2º grau como, $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ para fazer rapidamente o esboço do gráfico, pois permite identificar a concavidade da parábola, o vértice e o eixo de simetria.

Além disso, devemos considerar alguns pontos ao lado do eixo de simetria para representar o gráfico da função do 2º grau, figura 22.

Figura 22 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$

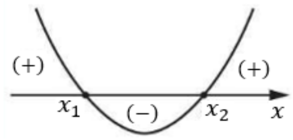
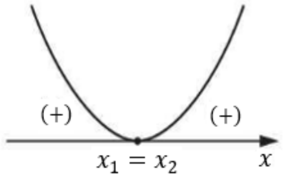
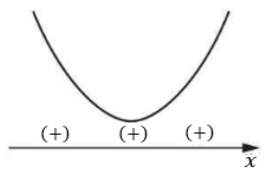
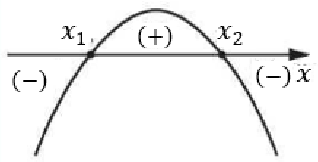
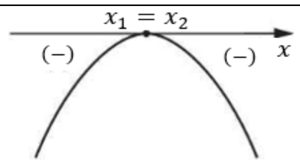
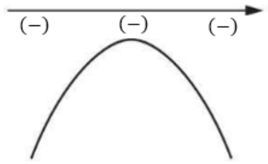


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Sinal da função do 2º grau

Para estudar o sinal da função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, devemos considerar o sinal do discriminante Δ e do coeficiente dominante a nos seguintes casos.

Quadro 5 – Possibilidades do estudo do sinal da função do 2º grau

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	 Para $x = x_1$ ou $x = x_2 \Rightarrow f(x) = 0$. Para $x < x_1$ ou $x > x_2 \Rightarrow f(x) > 0$. Para $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) < 0$.	 Para $x = x_1 = x_2 \Rightarrow f(x) = 0$. Para $x \neq x_1$e $x \neq x_2 \Rightarrow f(x) > 0$.	 $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > 0$.
$a < 0$	 Para $x = x_1$ ou $x = x_2 \Rightarrow f(x) = 0$. Para $x < x_1$ ou $x > x_2 \Rightarrow f(x) < 0$. Para $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) > 0$.	 Para $x = x_1 = x_2 \Rightarrow f(x) = 0$. Para $x \neq x_1$e $x \neq x_2 \Rightarrow f(x) < 0$.	 $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) < 0$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Dada a função $y = x^2 - 6x + 8$, calcule as coordenadas do vértice e a imagem da função.

(2) Determine o conjunto imagem das funções:

(a) $f(x) = x^2 - 10x + 9$

(b) $f(x) = -2x^2 + 1$

(c) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

(3) Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $y = -x^2 + 3x + 4$

(b) $y = x^2 - 2x + 12$

(4) Determine o ponto mínimo da função $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

(5) Determine o valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

(6) Seja a função $f(x) = 3x^2 + 4$ definida para todo x real. Determine seu conjunto imagem.

(7) O custo para se produzir x unidades de um produto é dado por $\mathrm{C(x)} = 2\mathrm{x}^2 - 100\mathrm{x} + 5000$.

(8) O lucro mensal de uma empresa é dado por $\mathrm{L(x)} = -\mathrm{x}^2 + 30\mathrm{x} - 5$, em que x é a quantidade mensal vendida. Qual o lucro mensal máximo possível?

(9) Vamos supor que um fabricante possa vender x unidades de um determinado produto pelo preço: $\mathrm{P} = 1000 - 0{,}01\mathrm{x}$ reais por unidade e que o custo desse x unidades seja $\mathrm{C} = 250\mathrm{x} + 100.000$ reais. Qual deve ser a produção da fábrica para que o lucro seja o máximo possível?

1.7 APLICAÇÕES DE FUNÇÕES DE 1° E 2° GRAU

1.7.1 Função custo total

Os custos de uma empresa variam com o nível de produção que chamamos de custo variável e indicamos por C_v, enquanto os custos que são fixos indicamos por C_f. Dependendo da empresa, podemos considerar como exemplo de custos fixos os gastos com a manutenção da fábrica, seguro e um certo número de funcionários. Como custos variáveis podemos considerar salários e matérias primas. Assim, seja x a quantidade produzida de um produto, desta forma, podemos escrever:

$$C_t(x) = C_f + C_v(x)$$

Onde:

C_t = Custo total

C_f = Custo fixo (custo inicial)

C_v = Custo variável (custo unitário x quantidades)

Chama-se custo médio de produção ou custo unitário (e indica-se por C_m) o custo total dividido pela quantidade, isto é:

$$Cm(x) = \frac{C_t(x)}{x}$$

Onde:

C_m: Custo médio ou unitário

1.7.2 Função receita total

Se o preço de um produto é p e a quantidade demandada a esse nível de preço é x, assim, podemos escrever a função receita total através da função demanda como:

$$R_t(x) = p.x$$

Onde:

R_t: Receita total

p: preço unitário

1.7.3 Função lucro total

Chama-se função lucro total (e indica-se porL_t) a diferença entre a função receita e a função custo total, isto é:

$$L_t(x) = R_t - C_t(x)$$

Onde:

L_t: Lucro Total

R_t: Receita Total

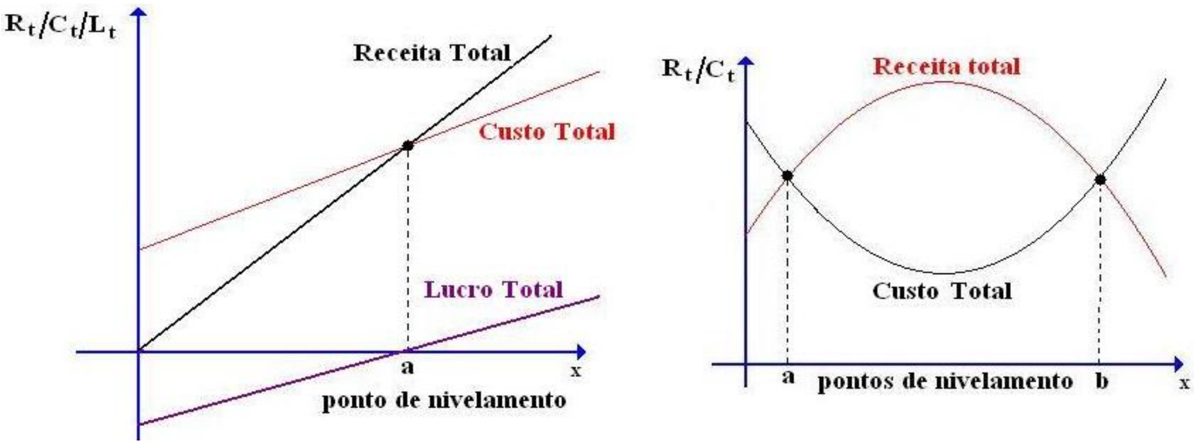
C_t: Custo Total

Os valores de x para os quais o lucro é nulo são chamados de pontos críticos ou pontos de nivelamento. Então, o ponto de intersecção dos gráficos das funções Receita e Custo é denominado ponto de nivelamento ou break-even point.

O interesse básico é achar o lucro. Neste caso devem ser determinados os intervalos onde o lucro é positivo e por isso precisamos conhecer as raízes da função lucro total.

Para polinômios de 2° grau, será suficiente determinar o vértice da parábola, no caso em que a parábola está com a concavidade voltada para baixo. A abscissa do vértice será o ponto de máximo (quantidade produzida que torna o lucro máximo) e a ordenada do vértice será o lucro máximo, figura 23.

Figura 23 – Gráfico da função receita, custo e lucro total



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Exemplo 1.23: O custo total de um fabricante consiste em uma quantia fixa de R$200,00 somada ao custo de produção, que é de R$50,00 por unidade. Expresse o custo total como função do número de unidades produzidas e construa o gráfico.

Exemplo 1.24: Um fabricante vende a unidade de certo produto por R$110,00. O custo total consiste em uma taxa fixa de R$ 7.500,00 somada ao custo de produção de R$60,00 por unidade.

(a) Construa as funções receita e custo e lucro total.

(b) Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?

(c) Se forem vendidas 100 unidades, qual será o lucro ou prejuízo do fabricante?

(d) Quantas unidades o fabricante precisa vender para obter um lucro de R$1.250,00?

(e) Construa, no mesmo par de eixos, os gráficos das funções receita e custo.

Exemplo 1.25: Uma indústria comercializa um certo produto e tem uma função custo total em mil reais, dada por $C_t(x) = x^2 + 20x + 475, x \geq 0$. A função receita total é dada por: $R(x) = 130x$. Determine:

(a) O lucro para venda de 100 unidades.

(b) Em que valor de x acontecerá o lucro máximo?

Resolução:

(a) Primeiramente, vamos determinar a função lucro total.

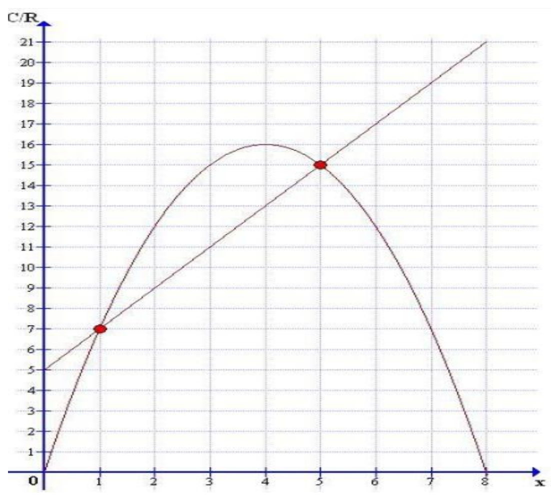
$$L_t(x) = R_t(x) - C_t(x) = 130x - (x^2 + 20x + 475) = -x^2 + 110x - 475.$$

Assim, $L_t(100) = -100^2 + 110.100 - 475 = 525$.

b) Agora, vamos usar o $x_v = -\frac{b}{2a}$, para determinar o valor de x que acontecerá o lucro máximo. Assim, $x_v = -\frac{110}{-2} = 55$. Portanto, em $x = 55$, acontecerá o lucro máximo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Considere as funções custo total $C(x) = 2x + 5$ e a função receita $R(x) = -x^2 + 8x$ relativas à produção e venda de x unidades de um mesmo produto, $0 \leq x \leq 8$, representadas no gráfico abaixo.



Observando o gráfico determine:

(a) A função Lucro.

(b) Quais os pontos de nivelamento

(c) Qual o intervalo onde o temos Lucro $(L(x) > 0)$.

(d) Qual o intervalo onde temos Prejuízo $(L(x) < 0)$.

(2) O custo total para um fabricante consiste numa quantia fixa R$200,00 somado ao custo de produção que é de R$50,00 por unidade. Expressa o custo total em função do número de unidades produzidas e construa o gráfico da função.

(3) Determinar o ponto crítico e esboçar os gráficos das funções receita, custo total e lucro total nos seguintes casos abaixo:

(a) $R_t(x) = 0{,}75x \ e \ C_t(x) = 20 + 0{,}25x.$

(b) $R_t\ (x) = 6x \ e \ C_t\ (x) = 60 + 2x$.

(4) Uma editora vende certo livro por R$60,00 a unidade. Seu custo fixo é R$10.000 e o custo variável por unidade é R$40,00.

(a) Qual o ponto de nivelamento?

(b) Quantas unidades a editora deverá vender para ter um lucro igual a R$8.000,00?

(c) Esboça os gráficos da receita, custo e lucro no mesmo sistema de eixos.

(5) Uma fábrica de móveis vende mesas por R$70,00 cada. O custo total de produção consiste numa sobretaxa de R$ 8.000,00 somada ao custo de produção de R$30,00 por mesa.

(a) Construa as funções receita e custo e lucro total.

(b) Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?

(c) Se forem vendidas 250 mesas, qual será o lucro ou prejuízo do fabricante?

(d) Quantas unidades o fabricante precisa vender para obter um lucro de R$6.000,00.

(e) Construa, no mesmo par de eixos, os gráficos das funções receita e custo.

(6) Um artesão tem um gasto fixo de R$600,00 e, em material, gasta R$25,00 por unidade produzida. Se cada unidade for vendida por R$175,00:

(a) Construa as funções receita e custo e lucro total.

(b) Quantas unidades o artesão precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
(c) Quantas unidades o artesão precisa vender para obter um lucro de R$450,00.

(7) Numa pizzaria, um rodízio de pizza custa R$20,00 e o preço da cerveja é de R$3,00. Em outro, o rodízio de pizza custa R$25,00, mas a cerveja custa R$2,50. Ache um critério para decidir qual pizzaria você irá, se forem levadas em conta apenas considerações de ordem financeira e supondo que você peça apenas um rodízio.

(8) Uma agência de aluguel de carros cobra uma diária de R$ 50,00 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado.
(a) Expresse o custo de alugar um carro dessa agência por um dia em função do número de quilômetros dirigidos e construa o gráfico.
(b) Quanto custa alugar um carro para uma viagem de 200 km de um dia?
(c) Quantos quilômetros foram percorridos se o custo do aluguel diário foi de R$ 400,00?

Demanda de Mercado

Seja U uma utilidade (bem ou serviço) e seja $D(p)$ a demanda ou procura de mercado desta utilidade a um preço p, isto é, a soma das quantidades que todos os compradores do mercado estão dispostos e aptos a adquirir a um preço p, em determinado período de tempo, que pode ser um dia, uma semana, um mês etc. Função demanda é a função que associa um preço p à demanda ou procura de mercado. A representação gráfica dessa curva é a curva de demanda da utilidade. Observe que para que haja demanda, é necessário que $p > 0$ e $D(p) > 0$.

Exemplo 1.26: Suponha que a demanda de mercado de um produto, que é vendido em pacotes de 10 kg, seja dada por $Dp) = 4.000 - 50p$.
(a) Determine o intervalo de variação de p.
(b) Represente essa função graficamente.
(c) Determine o valor da demanda para p = R$5, 00 e p = R$40,00
(d) A que nível estará o preço se a demanda for de 3.500 pacotes?

(e) A que preço a demanda será menor que 1.000 pacotes?

(f) A que preço a demanda será maior que 3.000 pacotes?

Oferta de Mercado

Oferta S(p) de mercado de uma utilidade cotada a um preço p é a soma das quantidades que todos os produtores estão dispostos e aptos a vender ao preço p, durante certo período de tempo. A função que associa todo preço p à respectiva oferta de mercado é a função oferta de mercado. Sua representação gráfica constitui a curva de oferta da utilidade. Para que haja oferta, é necessário, naturalmente, que $\mathrm{S(p)} > 0$.

Exemplo 1.27: Suponha que a oferta de mercado de um produto, seja dada por $S(p) = 2p - 30, com\, p \leq 130$.

(a) A partir de que preço haverá oferta?

(b) Represente graficamente a função.

(c) A que preço a oferta será de 100 unidades?

(d) A que preço a oferta será maior que 150 unidades?

(e) A que preço a oferta será menor que 200 unidades?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Quando o preço de um certo produto for de p reais, um lojista espera oferecer $S = 4p + 300$ produtos, enquanto a demanda local é de $D = -2p + 480$.

(a) Para que preço de mercado a oferta será igual a demanda local?

(b) Quantos produtos serão vendidos por este preço?

(c) Se o preço for de R$ 20,00, haverá excesso ou escassez do produto? De quanto? **(d)** Construa os dois gráficos no mesmo par de eixos.

(2) As funções oferta e demanda de um determinado produto são dadas, respectivamente, por $S = p^2 + 3p - 70\ e\ D = 410 - p$.

(a) Para que preço de mercado a oferta será igual à demanda?

(b) Quantos produtos serão vendidos por este preço?

(c) Se o preço for de R$25,00 haverá excesso ou escassez do produto? De quanto?

(d) Construa os dois gráficos no mesmo par de eixos.

(3) Suponha que a demanda de mercado de um produto, seja dada por $D(p) = 45 - 5p$ unidades, onde p é o preço por unidade do bem.

(a) Determine o intervalo de variação de p.

(b) Represente essa função graficamente.

(c) Determine o valor da demanda para p = R$ 5,00 (d) A preço a demanda será de 30 pacotes?

(e) A que preço a demanda será menor ou igual a 10 pacotes?

(f) A que preço a demanda será maior ou igual a 35 pacotes?

(4) Suponha que a demanda de mercado de um produto seja dada por $D(p) = 16 - p^2$, onde p é o preço por unidade.

(a) Determine o intervalo de variação de p.

(b) Represente essa função graficamente.

(c) Determine o valor da demanda para $p = R\$2{,}00$.

(5) Considere a oferta dada pela função $S = p^2 - 64, com\, p \leq 20$.

(a) A partir de que preço haverá oferta?

(b) Qual o valor da oferta para p = R$ 20,00?

(c) A que preço a oferta será de 297 unidades?

(d) A que preço a oferta será de 57 unidades?

(e) Trace o gráfico da curva oferta.

(6) Seja a oferta de mercado de uma utilidade dada por $S = -30 + 2p$, com p R$100,00.

(a) A partir de que preço haverá oferta?

(b) Construa o gráfico da função.

(c) Qual o valor da oferta se p = R$ 27,00?

(d) A que preço a oferta será de 80 unidades?

(e) A partir de que preço a oferta será maior que 50 unidades?

(f) A partir de que preço a oferta será menor que 150 unidades?

(g) Para que preços a oferta ficará entre 20 e 70 unidades?

(7) Determine o preço e a quantidade de equilíbrio nos seguintes casos:

(a) $D = 34 - 5p, S = -8 + 2p$

(b) $D = 10 - 0{,}2.p, S = -11 + p$

(c) $D = 32 - p^2, S = p^2 - 18$

(d) $D = 56 - p^2, S = p^2 - 16$

1.8 FUNÇÃO POLINOMIAL

Definição 1.8 É uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, $a_n \neq 0$, são números reais denominados coeficientes e n um número natural que determina o grau da função.

O gráfico de uma função polinomial é uma curva. Além disso, pode apresentar pontos de máximos e mínimos.

Exemplo 1.26:

(a) A função constante $f(x) = b$ é uma função polinomial de grau zero.

(b) A função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ é uma função polinomial do 1º grau.

(c) A função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é denominada de função quadrática.

(d) A função polinomial do 3º grau é escrita como, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$.

(e) A função polinomial do 3º grau escrita como, $f(x) = x^3$ é denominada função cúbica.

(f) A função polinomial do 4º grau é escrita como, $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $a \neq 0$.

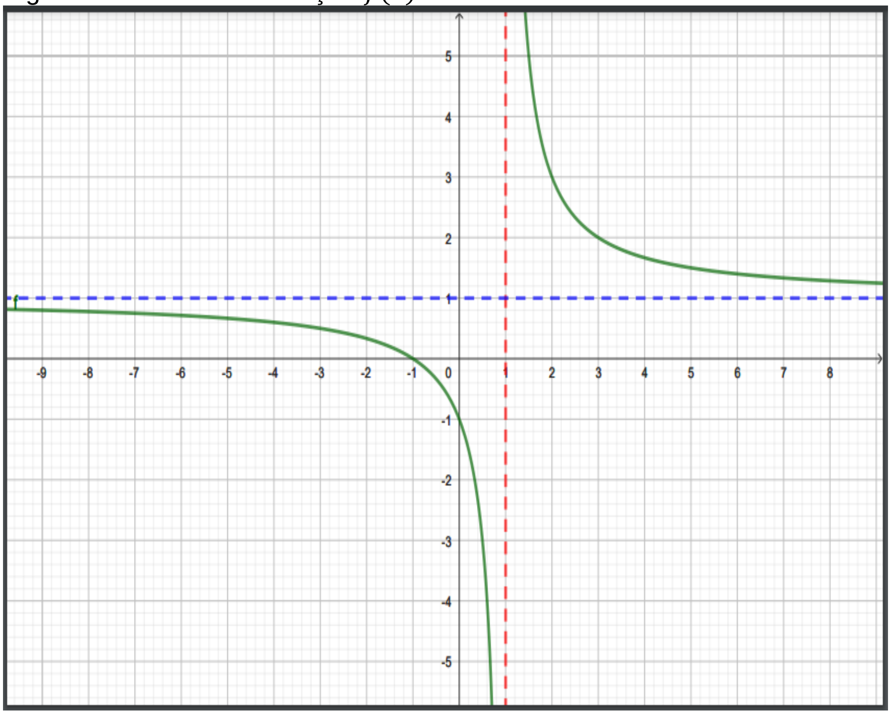
1.9 FUNÇÃO RACIONAL

Definição 1.9 É uma função definida como o quociente de duas funções polinomiais, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.

Dessa forma, o domínio da função racional é o conjunto dos números reais excluindo x tal que $q(x) = 0$.

Exemplo 1.27: A função $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ é racional com domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Figura 24 – Gráfico da função $f(x)$



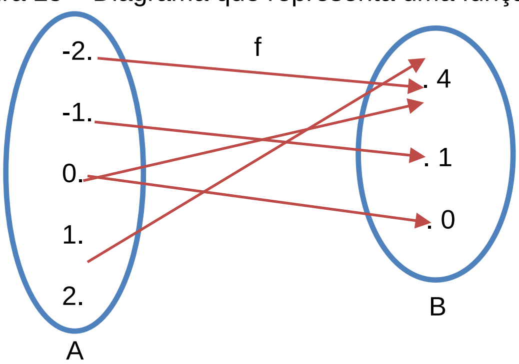
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

1.10 CLASSIFICAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Definição 1.10 Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A / f(x) = y$.

Implica que $CD(f) = Im(f) = B$. A seguir, na figura 25, o diagrama representa uma função sobrejetora.

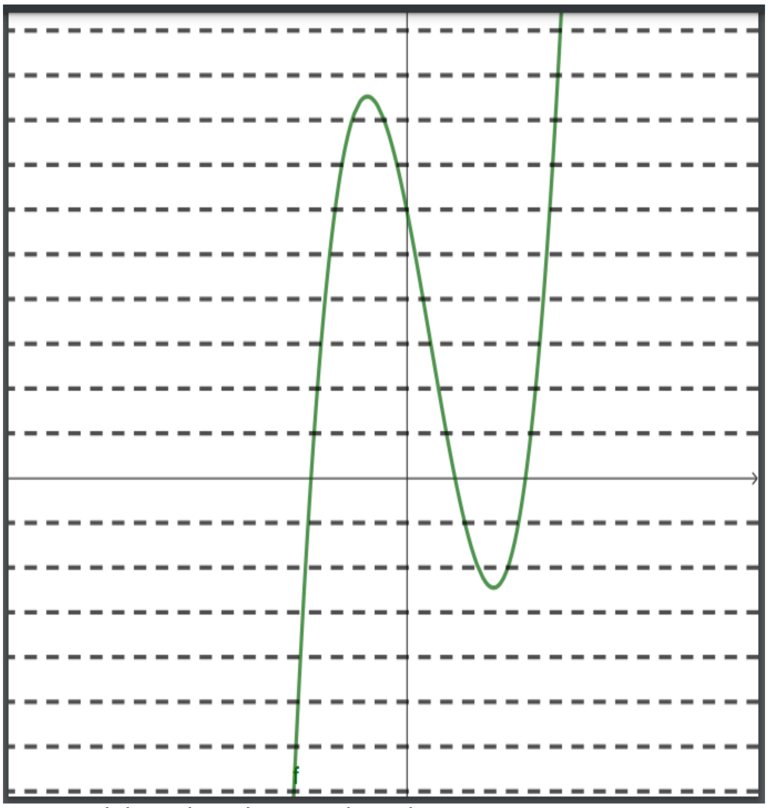
Figura 25 – Diagrama que representa uma função sobrejetora



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A seguir, figura 26, o gráfico de uma função sobrejetora.

Figura 26 – Gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



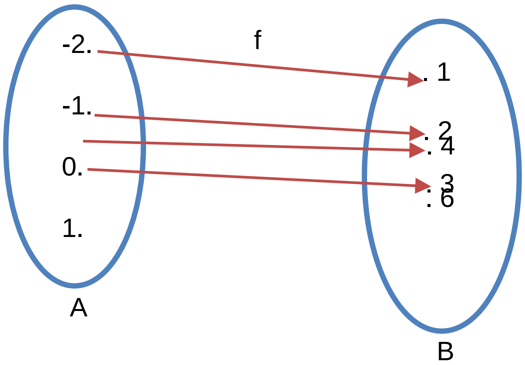
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 26, toda reta traçada na horizontal no seu contradomínio $\mathbb{R}$ intercepta o gráfico f em pelo menos um ponto. Implica que $\forall\, y \in \mathbb{R}$ é imagem de algum $x \in \mathbb{R}$ no seu domínio. Dessa forma, a função é sobrejetora.

Definição 1.11 Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, $\forall\, x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, temos $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

A seguir, figura 27, o diagrama representa uma função injetora.

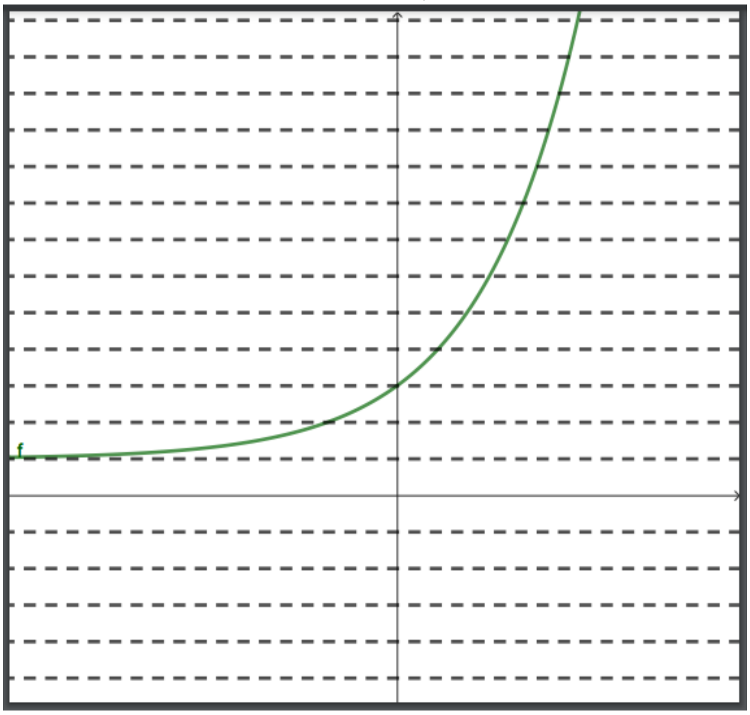
Figura 27 – Diagrama que representa uma função injetora



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A seguir, figura 28, o gráfico de uma função injetora.

Figura 28 – Gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



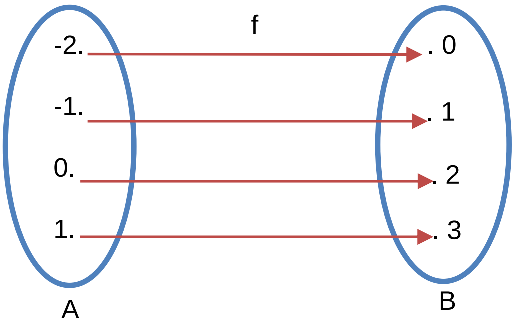
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 28, toda reta traçada na horizontal no seu contradomínio $\mathbb{R}$ intercepta o gráfico de f, no máximo, em um só ponto. Implica que nenhum elemento de Im(f) é imagem de mais de um elemento do domínio D(f). Dessa forma, a função é injetora.

Definição 1.12 Uma função $f: A \to B$ é bijetora se, e somente se, f for ao mesmo tempo sobrejetora e injetora.

A seguir, figura 29, o diagrama representa uma função bijetora.

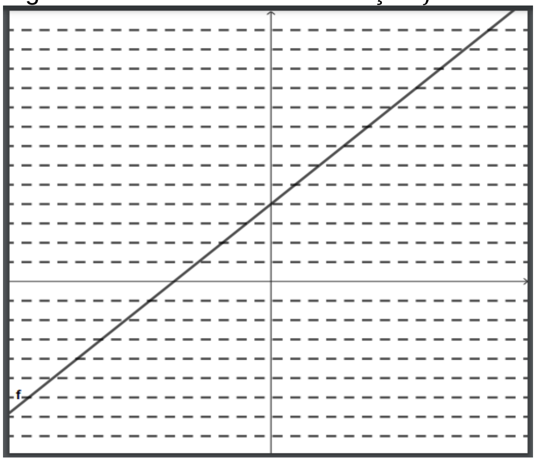
Figura 29 – Diagrama que representa uma função bijetora



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A seguir, figura 30, o gráfico de uma função bijetora.

Figura 30 – Gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 30, toda reta traçada na horizontal no seu contradomínio $\mathbb{R}$ intercepta o gráfico de f, em apenas um ponto. Implica que f é sobrejetora e injetora. Dessa forma, a função é bijetora.

1.11 PARIDADE DE UMA FUNÇÃO

Definição 1.13 Uma função $f: A \to B$ é par se, e somente se, $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$.

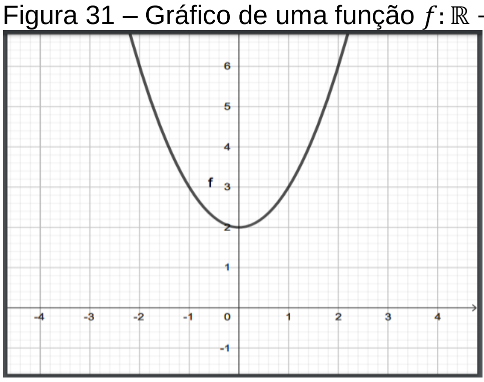
Exemplo 1.28: Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$.

Resolução:

$$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$$

Portanto, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$ é par. A seguir, figura 31, o gráfico de uma função par.

Figura 31 – Gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 31, a função par é simétrica em relação ao eixo das ordenadas.

Definição 1.14 Uma função $f: A \rightarrow B$ é ímpar se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in A$.

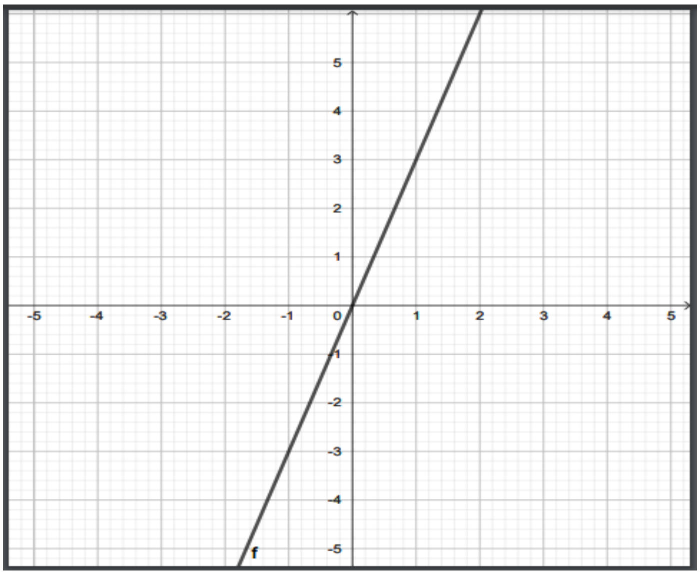
Exemplo 1.29: Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$.

Resolução:

$$f(-x) = 3.(-x) = -3x = -f(x).$$

Portanto, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ é ímpar. A seguir, figura 32, o gráfico de uma função ímpar.

Figura 32 – Gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

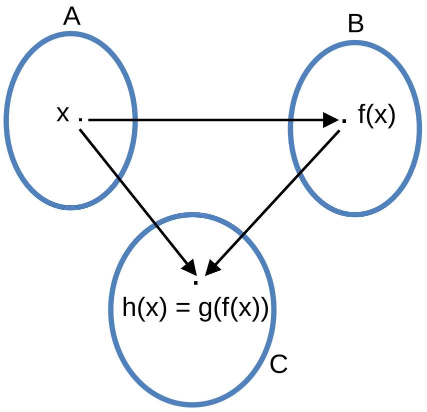
Em relação ao gráfico, figura 32, a função ímpar é simétrica em relação à origem do plano cartesiano.

1.12 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Definição 1.15 Sejam as funções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, denominamos função composta de g com f a função $gof : A \rightarrow C$, que é definida por $(gof)(x) = g(f(x)), x \in A$.

A seguir, figura 33, o diagrama que representa uma função composta.

Figura 33 – Diagrama de uma função composta

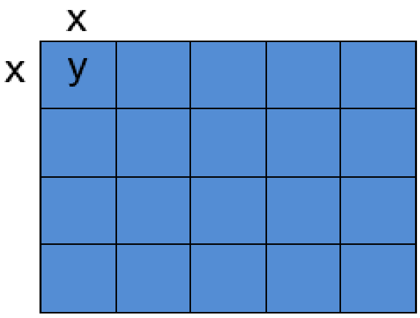


Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

De acordo com a definição 1.15 o domínio de $g(f(x))$ é o conjunto de todos os valores de x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g.

Exemplo 1.30: Considerar a seguinte situação: Um terreno retangular foi dividido em 20 lotes, todos de forma quadrada e de mesma área, figura 33. Nessas condições, vamos mostrar que a área do terreno é uma função da medida do lado de cada lote, representando uma composição de funções.

Figura 34 – Terreno retangular



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Neste caso, temos:

x: medida do lado de cada lote.

y: área de cada lote.

z: área do terreno.

(a) Área de cada lote: $x^2 \Rightarrow y = x^2$

Então, a área de cada lote é uma função da medida do lado, ou seja: $y = f(x) = x^2$.

(b) Área do terreno: vinte vezes a área de cada lote $\Rightarrow z = 20y$. Então, a área do terreno é uma função da área de cada lote, $z = g(y) = 20y$.

(c) Comparando a e b, temos: a área do terreno é igual a $20x^2$, $z = 20x^2$, pois $y = x^2$ e $z = 20y$.

Então, a área do terreno é uma função da medida de cada lote, $z = h(x) = 20x^2$.

A função h(x), chamamos de função composta de g com f, e pode ser indicada por: gof ou g(f(x)).

Portanto, gof(x) = g(f(x)), $\forall\ x \in D(f)$.

Exemplo 1.31: Sejam f a função definida por $\sqrt{x-1}$ e g por $g(x) = x+2$, determinar:

(a) $fog(x)$, e determine o domínio de fog.

(b) $gof(x)$, e determine o domínio de gof.

Resolução:

(a) $fog(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = \sqrt{x+2-1} = \sqrt{x+1}$. O domínio de g é $\mathbb{R}$, o domínio de f é $[1,+\infty[$. Porém, o domínio de fog é o conjunto dos números reais para os quais $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$, ou seja, $D(fog) = [-1,+\infty[$.

(b) $gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = \sqrt{x-1}+2$. Como o domínio de f é $[1,+\infty[$ e o domínio de g é $\mathbb{R}$. Dessa forma, o domínio de gof é $[1,+\infty[$.

Exemplo 1.32: Sejam $f(x) = 3x - 2\ e\ g(x) = 4x + 1$. Determine $g(f(x))$.

Resolução:

$g(f(x)) = g(3x - 2) = 4.(3x - 2) + 1 = 12x - 8 + 1 = 12x - 7$.

Portanto, $g(f(x)) = 12x - 7$.

Exemplo 1.33: Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 2$. Determine $fog(x)$ e $gof(x)$.
Resolução:

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f(x + 2) = (x+2)^2 - 1$$
$$f\big(g(x)\big) = x^2 + 4x + 4 - 1$$
$$f\big(g(x)\big) = x^2 + 4x + 3.$$

Portanto, $fog(x) = x^2 + 4x + 3$.

$gof(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = x^2 - 1 + 2 = x^2 - 1 + 2 = x^2 + 1$.
Portanto, $gof(x) = x^2 + 1$.

Exemplo 1.34: Dada à função $f(x) = x^2 + 1$, determine $f(f(2))$.
Resolução:

$$f(2) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5.$$
$$f(f(2)) = (5)^2 + 1 = 25 + 1 = 26.$$

Portanto, $f(f(2)) = 26$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

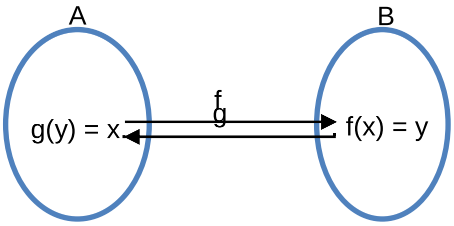
(1) Dados f(x) = x - 1 e g(x) = 5x - 6, determine:
(a) $f(g(x))$
(b) $g(f(-1))$

(2) Sejam as funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = 2x + 1$. Calcule:
(a) $f(g(1))$
(b) $g(f(x))$

1.13 FUNÇÃO INVERSA

Definição 1.16 Seja $y = f(x)$ uma função $f\colon A \to B$. Se $\forall\, y \in B$, existir exatamente um valor $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g\colon B \to A$ tal que $x = g(y)$. A função g é chamada de função inversa e denotada por $f^{-1}(x)$.

Figura 35 – Diagrama



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Exemplo 1.35: Escreva a função que determina o perímetro do quadrado em função da medida do lado. Em seguida, escreva a função que determina a medida do lado em função do perímetro do quadrado.

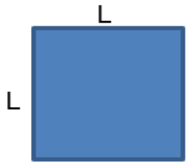
Resolução:

Ao associar o lado e o perímetro de um quadrado, obtemos duas funções bijetoras, tais que:

• a primeira a cada valor do lado associa o perímetro.

• a segunda, a cada valor do perímetro associa o lado.

Figura 36 – Quadrado de lado L



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

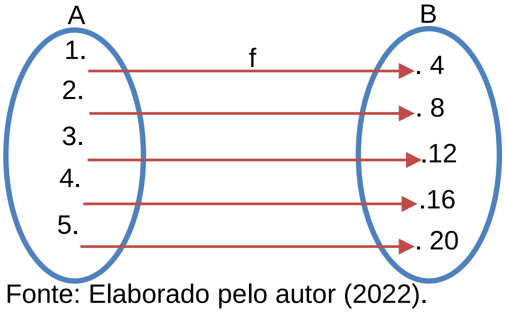
Neste caso, temos:

L: medida do lado.

P: medida do perímetro.

A seguir, figura 37, a associação da medida do lado com o perímetro do quadrado.

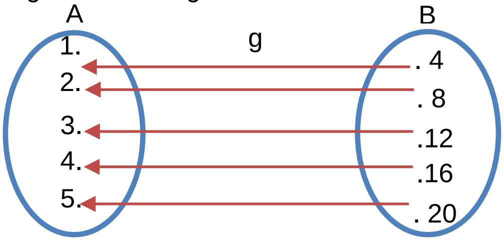
Figura 37 – Diagrama



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Portanto, podemos escrever $f: A \to B$, tal que, $f(x) = 4x$. A seguir, figura 38, a associação da medida do perímetro com a medida do lado do quadrado.

Figura 38 – Diagrama



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Portanto, podemos escrever $g: B \to A$, tal que, $g(y) = \frac{y}{4}$. Dessa forma, f e g são funções bijetoras tais que: o $D(f) = A$ e $CD(f) = B$. Entretanto, o $D(g) = B$ e $CD(f) = A$. Assim, $D(f) = Im(g)$ e $Im(f) = D(g)$.

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO INVERSA

(P_1) $Dom(f^{-1}) = Im\,(f)$.

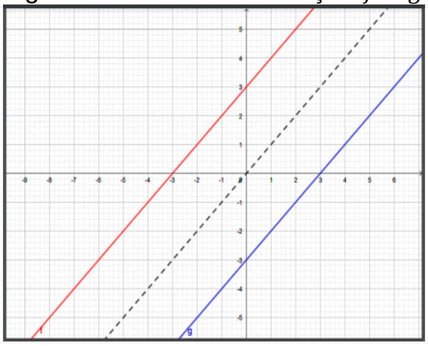
(P_2) $Im(f^{-1}) = Dom\,(f)$.

(P_3) Seja $f : A \to B$ uma função inversível. A função $g : B \to A$ é uma função inversa da f quando para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ temos: $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$.

(P_4) O gráfico da $f^{-1}(x)$ é simétrico ao gráfico de $f(x)$ em relação à reta $y = x$.

Exemplo 1.36: Seja a função f dada por $f(x) = x + 3$ e a sua função inversa dada por $f^{-1}(x) = x - 3$. A seguir, figura 39, o gráfico das funções $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.

Figura 39 – Gráfico da função f e $g = f^{-1}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

De acordo com a P_4, o gráfico da $g = f^{-1}(x) = x - 3$ é simétrico ao gráfico de $f(x) = x + 3$ em relação à reta y = x.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Determine a função inversa das seguintes funções bijetoras de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

(a) f(x) = x – 6

(b) f(x) = 3x + 4

(c) f(x) = 1 – 2x

(d) f(x) = $\frac{x+3}{2}$

(2) Seja a função f(x) = 3x - 4 definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determine:

(a) $f^{-1}(x)$

(b) $f^{-1}(2)$

CAPÍTULO 2 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

2.1 POTENCIAÇÃO

Definição 2.1 Dado o número real a qualquer e um número n inteiro e positivo, define-se potência da base a e expoente n ao número constituído por n fatores iguais a a. Assim, $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$.

2.2 PROPRIEDADES GERAIS SOBRE POTENCIAÇÃO

(P_1) $Sendo\ todo\ número\ real\ a, com\ a\ \neq 0, temos: a^0 = 1.$

(P_2) $Para\ todo\ número\ real\ a, com\ a \neq 0, n \in \mathbb{N}\ com\ n \neq 0, temos: a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$

(P_3) $Seja\ a\ \in \mathbb{R}, com\ a \neq 0, m\ e\ n\ \in \mathbb{Z}, temos: a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$

(P_4) $Seja\ a\ \in \mathbb{R}, com\ a \neq 0, m\ e\ n\ \in \mathbb{Z}, temos: a^m : a^n = a^{m-n}.$

(P_5) $Seja\ a\ \in \mathbb{R}, com\ a \neq 0, m\ e\ n\ \in \mathbb{Z}, temos: (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$

(P_6) $Dada\ as\ potências\ (a.b)^n\ ou\ (a:b)^n,\ sendo\ a\ e\ b\ \in \mathbb{R},\ com\ a\ e\ b\ \neq 0\ e\ n\ \in \mathbb{Z},$ $com\ n\ \neq 0,\ temos:$

$$(a.b)^n = a^n.b^n\ ou\ (a:b)^n = a^n:b^n.$$

(P_7) $Dada\ a\ potência\ a^{\frac{m}{n}}, sendo\ a \in \mathbb{R}_+, m\ \in \mathbb{Z}\ e\ n\ \in \mathbb{Z}_+^*, com\ n \geq 2, temos:$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Observação: 0° é uma indeterminação.

2.3 RADICIAÇÃO

Definição 2.2 Dados um número real a (radicando) não negativo e um número natural $n \geq 2$ (índice), define-se raiz enésima de a o número real b cuja potência enésima é igual a a, ou seja, $b^n = a$. Assim, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Exemplo 2.1: Calcule.

(a) $\sqrt[5]{32} = 2,\ pois, 2^5 = 32$.

(b) $\sqrt[3]{-27} = -3,\ pois, (-3)^3 = -27$.

(c) $\sqrt{4} = \pm 2,\ pois, (\pm 2)^2 = 4$.

(d) $\sqrt{-9}$ não existe no conjunto dos números reais um número x tal que $x^2 = -4$.

OBSERVAÇÕES:

(a) Se o índice do radical é um número ímpar, a sua raiz é única e tem o mesmo sinal do radicando;

(b) Os números negativos não têm raiz de índice par no campo dos números reais;

(c) Se o índice do radical é par, os números positivos têm sempre duas raízes reais diferentes (simétricas).

2.4 PROPRIEDADES GERAIS SOBRE RADICIAÇÃO

Dados os números reais a e b, o número inteiro m e os números naturais não nulos n, $n \geq 2$ e p, temos:

$(P_1) \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$

$(P_2) \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$(P_3) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$

$(P_4) \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

$(P_5) \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p.n]{a}$

2.5 EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Definição 2.3 Chama-se equação exponencial qualquer equação que apresenta incógnita no expoente.

O método de resolução de equações exponenciais é chamado de redução a uma base comum, em que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais. Assim, temos:

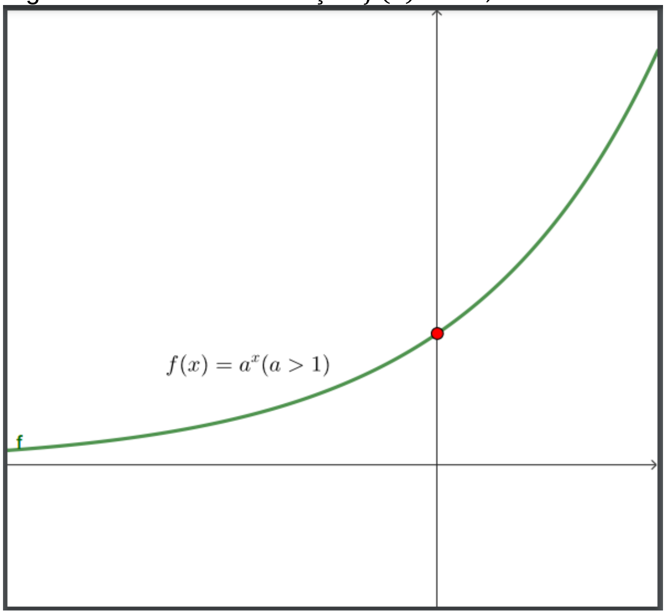
$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \; (com\; 0 < a \neq 1).$$

2.6 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição 2.4 Chamamos de função exponencial de base a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real o número real a^x, sendo $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$, ou seja, $\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = a^x \end{cases}$.

Gráficos da Função Exponencial

Figura 40 – Gráfico da função $f(x) = a^x, com\; a > 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 40, podemos afirmar:

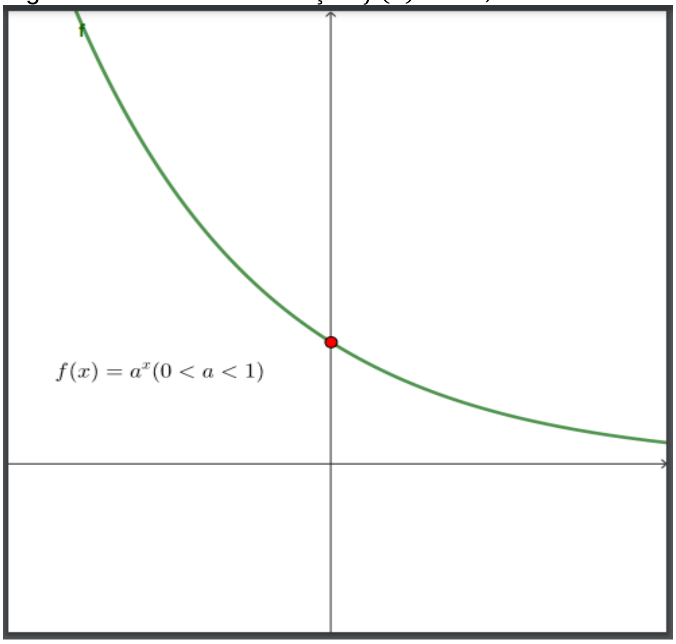
(a) O domínio é dado por: $D(f) = \mathbb{R}$.

(b) A imagem é dada por: $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

(c) A função exponencial do tipo $f(x) = a^x$ passa pelo ponto (0, 1).

(d) Se $a > 1$, então, o seu gráfico é crescente, pois, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Figura 41 – Gráfico da função $f(x) = a^x, com\ 0 < a < 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 41, podemos afirmar:

(a) O domínio é dado por: $D(f) = \mathbb{R}$

(b) A imagem é dada por: $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

(c) A função exponencial do tipo $f(x) = a^x$ passa pelo ponto (0,1).

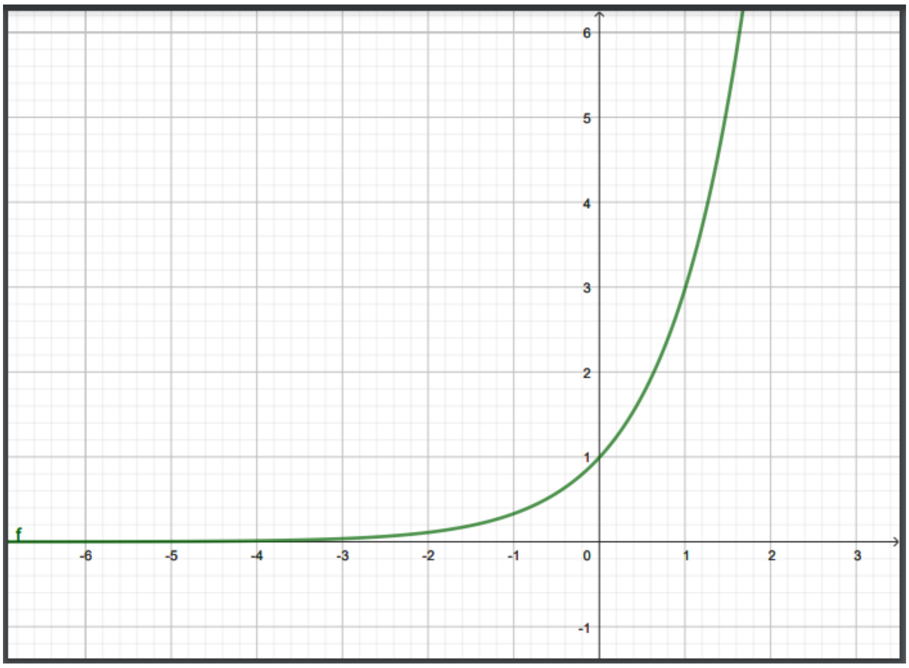
(d) Se $0 < a < 1$, então, o seu gráfico é decrescente, pois, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo 2.2: Elabore uma tabela relacionando x a cada uma das funções. Em seguida, construa o gráfico das seguintes funções exponenciais:

(a) $f(x) = 3^x$

Resolução:

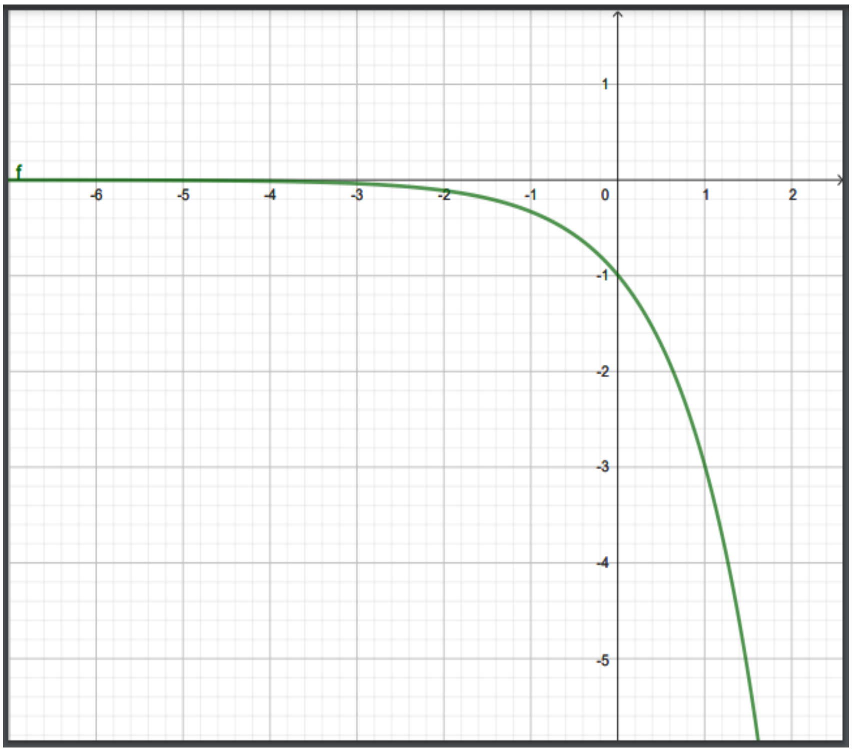
x	$f(x)$
2	$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
-1	$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$
0	$3^0 = 1$
1	$3^1 = 3$
2	$3^2 = 9$



(b)$f(x) = -3^x$

Resolução:

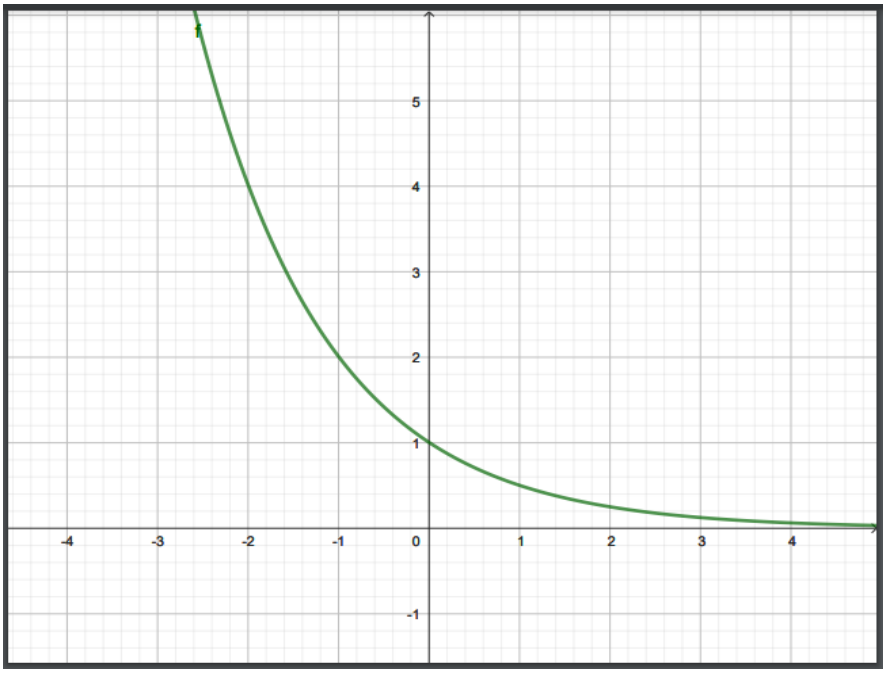
x	$f(x)$
-2	$-(3^{-2}) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$
-1	$-(3^{-1}) = -\frac{1}{3^1} = -\frac{1}{3}$
0	$-(3^0) = -1$
1	$-(3^1) = -3$
2	$-(3^2) = -9$



(c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Resolução:

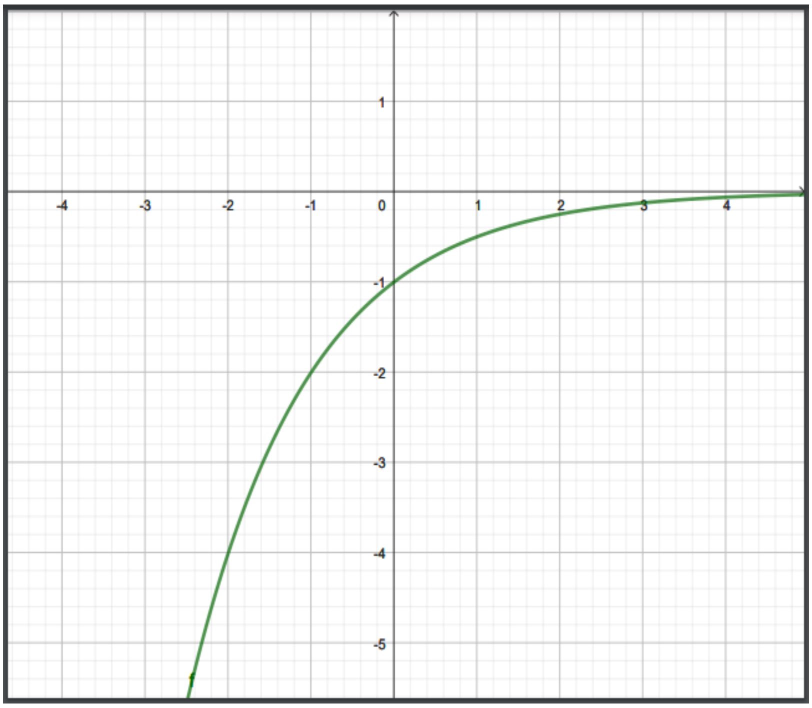
x	$f(x)$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$



(d) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Resolução:

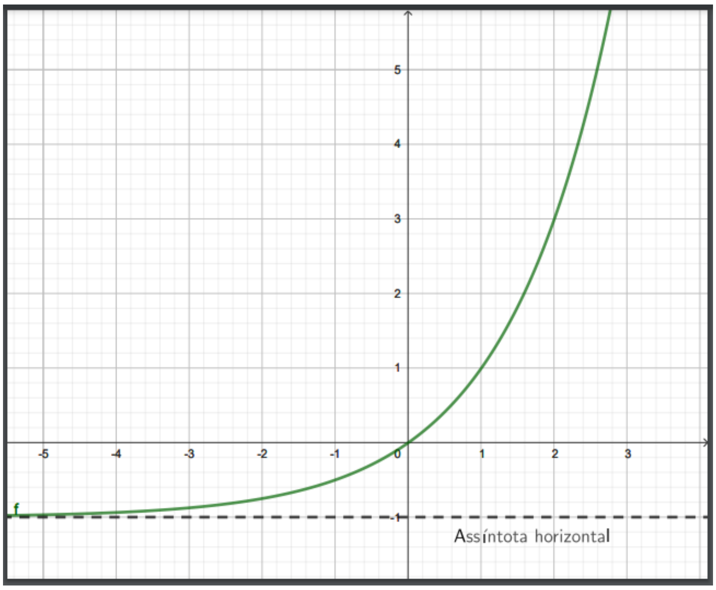
x	$f(x)$
-2	$-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -(2^2) = -4$
-1	$-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -(2^1) = -2$
0	$-\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = -1$
1	$-\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = -\frac{1}{2}$
2	$-\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = -\frac{1}{4}$



(e) $f(x) = 2^x - 1$

Resolução:

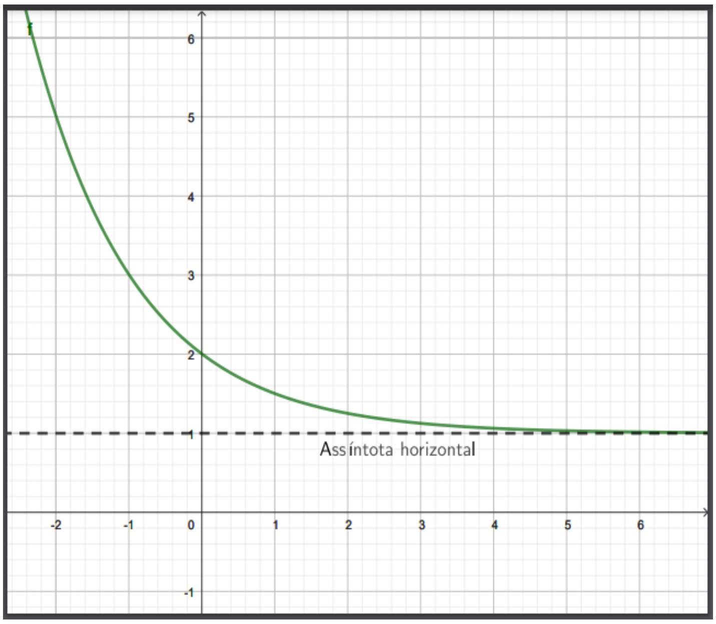
x	$f(x)$
-2	$2^{-2} - 1 = \frac{1}{2^2} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$
-1	$2^{-1} - 1 = \frac{1}{2^1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$
0	$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$
1	$2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$
2	$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$



(f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

Resolução:

x	$f(x)$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} + 1 = 1 + 1 = 2$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

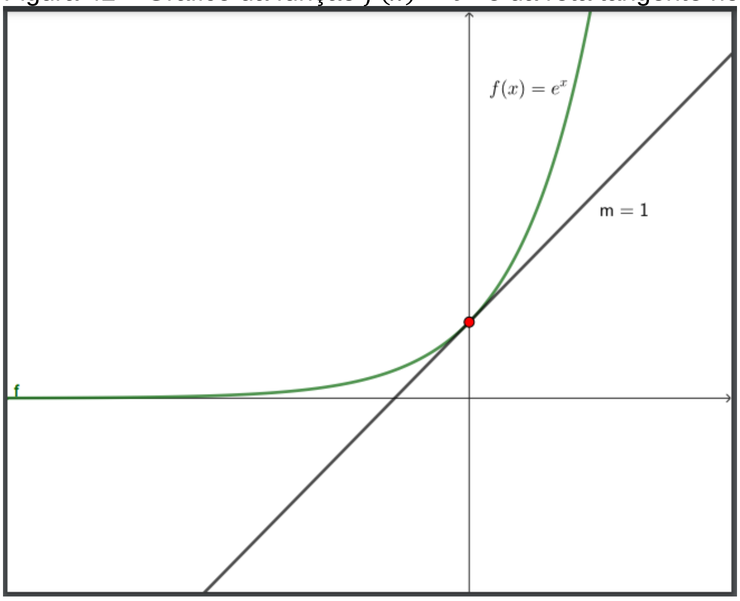


2.7 A FUNÇÃO EXPONENCIAL $\boldsymbol{f(x) = e^x}$

De todas as bases possíveis para uma função exponencial $f(x) = a^x$, há mais importante para cálculos é a base e. “Essa notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente por ser a primeira letra da palavra *exponencial*” (STEWART, 2009, p. 47).

Ao considerar a base e, as fórmulas do cálculo ficam mais simples, pois sobre a função $f(x) = e^x$ passa a reta tangente no ponto (0,1) com uma inclinação 1, figura 42. Assim, é mais apropriado adotar como base o número e. O valor do número irracional e até a quinta casa decimal é 2,71828.

Figura 42 – Gráfico da função $f(x) = e^x$ e da reta tangente no ponto (0,1)



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Exemplo 2.3: Acessar o software GeoGebra pelo QR Code, figura 43, e representar o gráfico das seguintes funções exponenciais.

(a) $f(x) = e^{-x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$

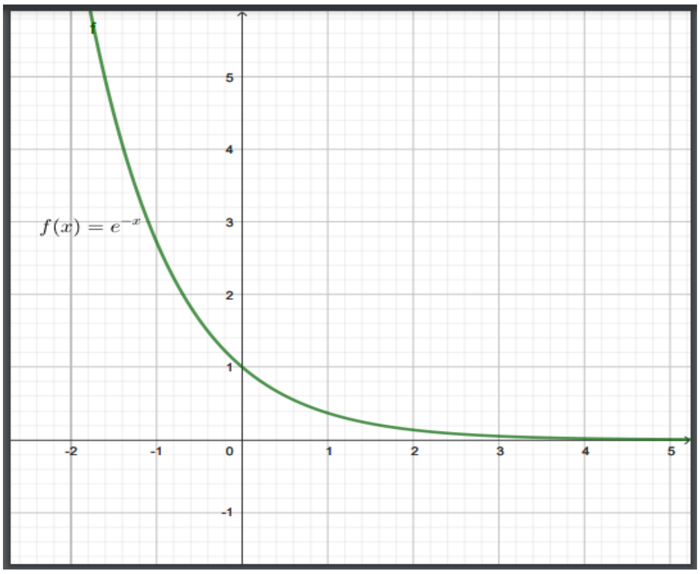
(c) $f(x) = e^x + 1$

(d) $f(x) = 3e^x - 2$

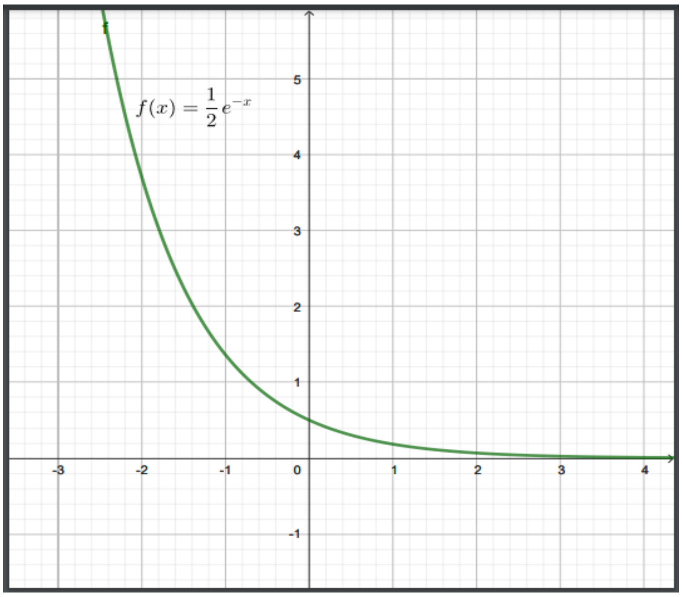
Figura 43 – QR Code para acessar o software GeoGebra

Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.

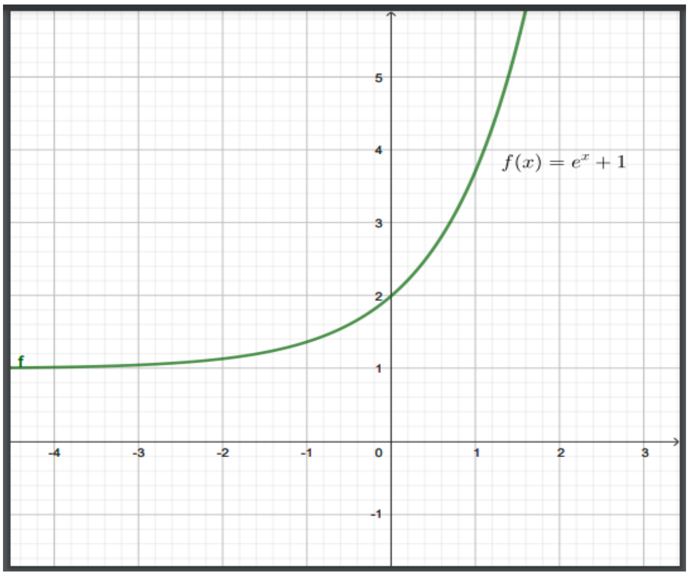
(a)



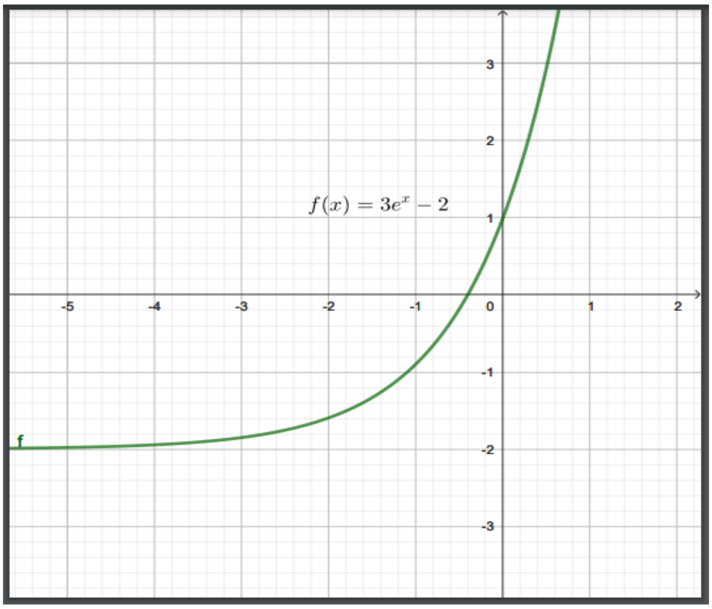
(b)



(c)



(d)



2.8 DECAIMENTO RADIOATIVO

"A massa de materiais radioativos, tais como o rádio, o urânio ou o carbono-14, se desintegra com o passar do tempo" (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p. 47).

Dessa forma, podemos definir a meia-vida de um material radioativo como o tempo necessário para que sua massa seja reduzida à metade. Considerando M_0, a massa inicial no instante $t = 0$, M a massa no instante qualquer t, podemos calcular aproximadamente a massa M pela função exponencial:

$$M = M_0 e^{-kt}.$$

Onde, $k > 0$ é uma constante que depende do material radioativo e está relacionada com sua meia-vida.

Exemplo 2.4: A meia-vida do carbono-14 é de aproximadamente 5.730 anos. Determine:

(a) o valor da constante k;

(b) a quantidade de massa presente após dois períodos de meia-vida, se no instante $t = 0$ a massa era M_0;

(c) a idade estimada de um organismo morto, sabendo que a presença do carbono – 14 neste é 80% da quantidade original.

Resolução:

(a)

$$\frac{M_0}{2} = M_0 e^{-k \cdot 5.730}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-5.730k}$$

$$ln\frac{1}{2} = lne^{-5.730k}$$

$$ln\frac{1}{2} = -5.730k$$

$$ln1 - ln2 = -5.730k$$

$$0 - ln2 = -5.730k$$

$$k = \frac{ln2}{5.730}$$

$$k \cong 0{,}0001209.$$

(b)

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_0\right)$$

$$M = \frac{1}{4}M_0$$

$$M = 0{,}25M_0.$$

(c) Considerando $M = 0{,}80M_0$, temos:

$$0{,}8M_0 = M_0e^{-0{,}0001209t}$$

$$ln0{,}8 = -0{,}0001209t$$

$$t = \frac{ln0{,}8}{-0{,}0001209}$$

$t \cong 1.846$ anos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Represente graficamente as seguintes funções exponenciais, determinando o domínio, e imagem indicando se é decrescente ou crescente.

(a) $y = 2^x$

(b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

(c) $y = e^{x+2}$

(d) $f(x) = 5^x$

(e) $y = e^{-x-3}$

(f) $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

(g) $y = 2e^x$

(h) $f(x) = \frac{1}{4}e^x + 2$

(i) $y = 4^x - 3$

(2) Seja f, g e h funções de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2.3^x, g(x) = 5^x - 2$ e $h(x) = 5^{x-2}$. Determine:

(a) $f(2)$

(b) $g(2)$

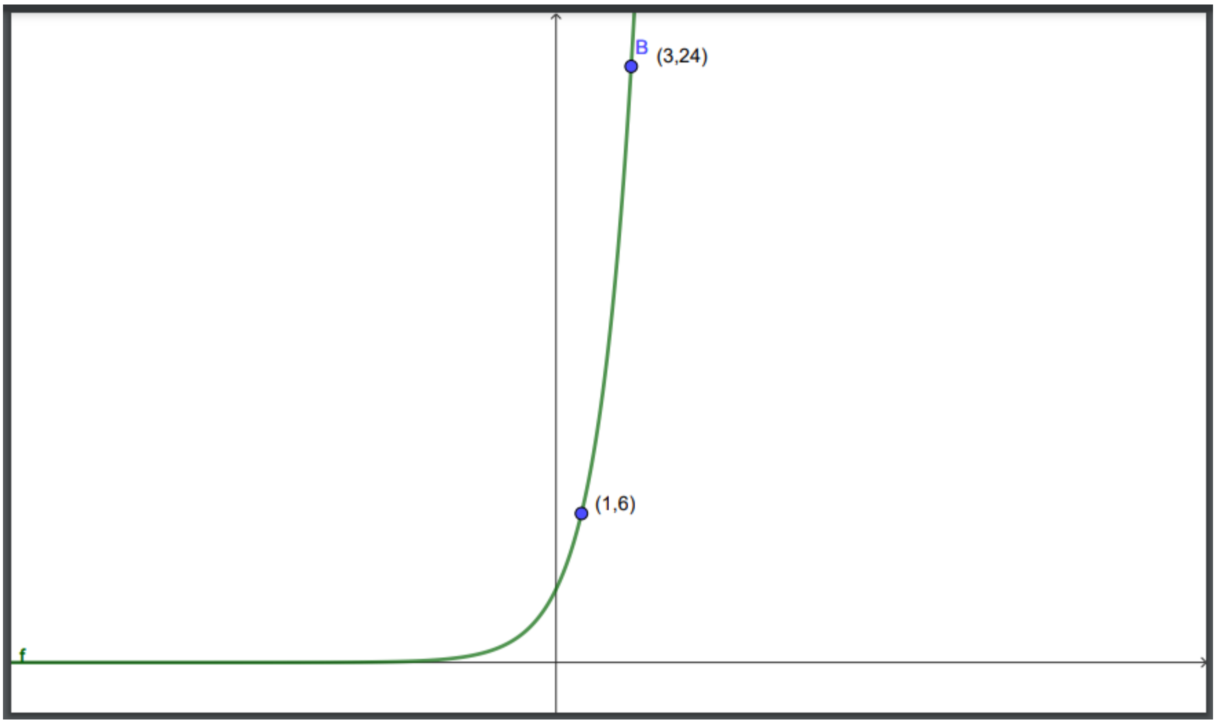
(c) $h(2)$

(d) x tal que $h(x) = 125$

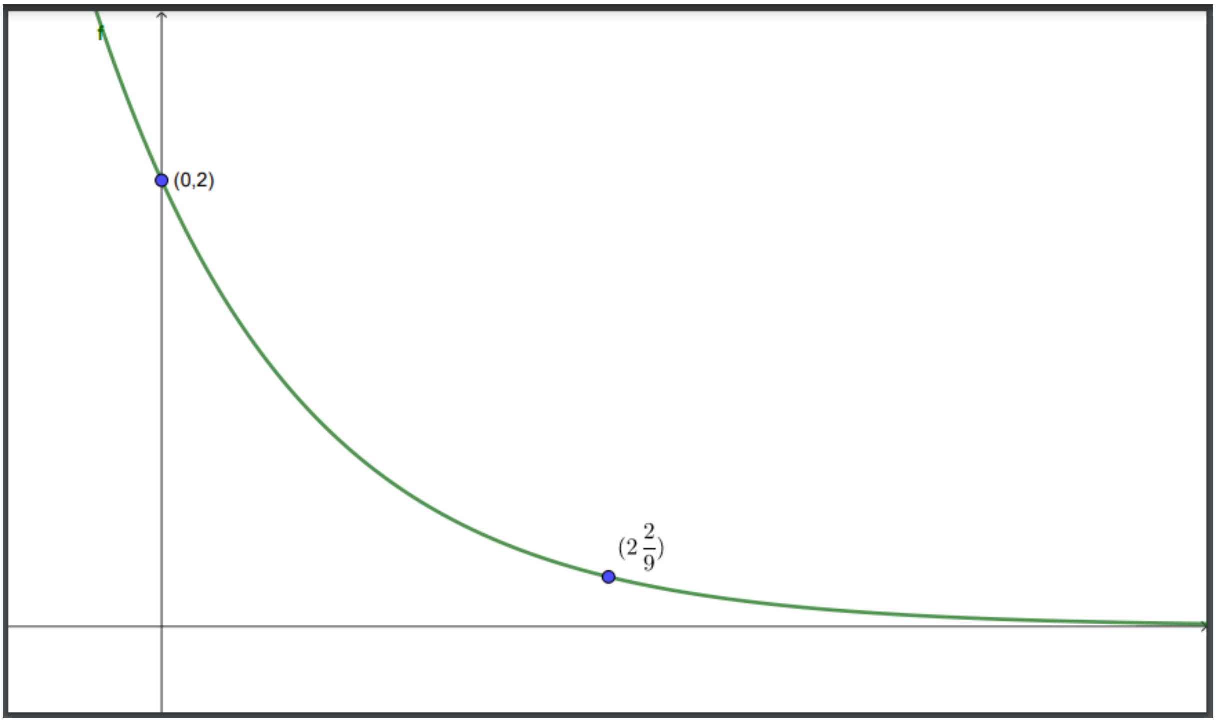
(e) x tal que $g(x) = 3$

(3) Encontre a função exponencial $f(x) = k.a^x$ de cada gráfico a seguir.

(a)



(b)



(4) Sob condições ideais sabe-se que uma certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias:

(a) Qual o tamanho da população após 15 horas?

(b) Qual o tamanho da população após t horas?

(c) Qual o tamanho da população após 20 horas?

(d) Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 50.000 bactérias.

(5) Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra de tamanho a cada meia hora.

(a) Qual o tamanho da população após 3 horas?

(b) Qual o tamanho da população após t horas?

(c) Qual o tamanho da população após 40 minutos?

(d) Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 100.000 bactérias.

(6) A meia-vida do rádio-226 é de 1.620 anos.

(a) Obter o modelo de decaimento exponencial para esta substância.

(b) Após 700 anos, qual o percentual de uma dada quantidade inicial de rádio ainda resta?

(7) Uma certa substância radioativa decai exponencialmente sendo que, após 100 anos, ainda retam 60% da quantidade inicial.

(a) Obter o modelo de decaimento exponencial para esta substância.

(b) Determinar a sua meia-vida.

(c) Determinar o tempo necessário para que reste somente 15% de uma dada massa inicial.

(8) Uma empresa expande suas vendas em 20% ao ano. Se este ano a venda inicial foi de 1.000 unidades, quantas venderá daqui a 5 anos? Dado: $V = V_0.(1+i)^t$.

(9) Um imóvel vale hoje R$150.000, 00 e a cada ano sofre uma desvalorização de 3% ao ano. Dado: $y = C.(1+i)^x$.

(a) Qual seu valor daqui a 10 anos?

(b) Seja y o valor do imóvel daqui a x anos. Qual o gráfico de y em função de x?

(10) Agrônomos e Matemáticos do IFPE estão pesquisando o crescimento de uma cultura de bactérias e concluíram que a população de uma determinada cultura P(t), sob certas condições, em função do tempo t, em horas, evolui conforme a função

$P(t) = 5.2^{\frac{t}{3}}$. Para atingir uma população de 160 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a:

(a) 5 **(b)** 15 **(c)** 160 **(d)** 32 **(e)** 10

(11) Um grupo de biólogos está estudando o desenvolvimento de uma determinada colônia de bactérias e descobriu que sob condições ideais, o número de bactérias pode ser encontrado através da expressão $N(t) = 2000.2^{0,5t}$, sendo t em horas. Considerando essas condições, quanto tempo após o início da observação, o número de bactérias será igual a 8.192.000?

(a) 10 h **(b)** 12 h **(c)** 20 h **(d)** 24 h **(e)** 8 h

CAPÍTULO 3 – FUNÇÃO LOGARÍTMICA

3.1 UMA BREVE HISTÓRIA

O surgimento dos logaritmos, deve-se ao matemático escocês John Napier (1550-1617), a palavra logaritmo é de origem grega, logarithmus: logos, razão, e arithmós: números. Jhon Napier se interessou fundamentalmente pelo cálculo numérico e pela trigonometria. Em 1614, e ao fim de 20 anos de trabalho, publicou a obra intitulada **Mirifici Logarithmorum canonis descriptio**, em português (Descrição da maravilhosa lei dos logaritmos). O matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), aperfeiçoou os logaritmos utilizando a base 10. Em 1624 publica sua pesquisa intitulada **Arithmetica logarithmica**, que continha uma tábua de logaritmos decimais, com 14 casas de precisão, dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 à 100.000.

Exemplo 3.1 Uma pessoa aplicou R$10.000,00 a juro composto de 1,8% ao mês. Após quanto tempo terá um total de R$11.534,00?

Resolução:

$C = 10.000$

$i = 1{,}8\%\ am = 0{,}018\ am$

$M = 11.534$

Usando a fórmula do montante temos:

$$M = C.(1+i)^t$$

$$11.534 = 10.000.(1+0{,}018)^t$$

$$\frac{11.534}{10.000} = 1{,}018^t$$

$$1{,}1534 = 1{,}018^t.$$

Para resolver essa equação exponencial, podemos explorar as propriedades dos logaritmos e fazer os cálculos com o auxílio de uma calculadora científica.

$$1{,}018^t = 1{,}1534$$

Aplicando logaritmo nos dois membros da igualdade, temos:

$$log1,018^t = log1{,}1534.$$

Usando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:

$$t.log1,018 = log1,1534.$$

Assim,

$$t = \frac{log1,1534}{log1,018} = 8.$$

Portanto, após 8 meses de aplicação, ela terá um montante de R$11.534, 00.

Definição 3.1 Dado um número a, positivo e diferente de um, e um número *b* positivo, chama-se logaritmo de *b* na base a o número real x tal que $a^x = b$.

De acordo com a definição 3.1, temos: $a > 0, a \neq 1\ e\ b > 0$.

Assim,

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Onde:

a : $base\ do\ logaritmo$.

b : $logaritmando\ ou\ antilogaritmo$.

x: $logaritmo$.

Exemplo 3.2: Calcule:

(a) $log_6 36$

Resolução:

$log_6 36 = x \Leftrightarrow 36 = 6^x \Leftrightarrow 6^2 = 6^x \Leftrightarrow x = 2.$

(b) $\log_5 625$

Resolução:

$\log_5 625 = x \Leftrightarrow 625 = 5^x \Leftrightarrow 5^4 = 5^x \Leftrightarrow x = 4.$

Existe vários sistemas de logaritmos, vamos apresentar dois deles que se destacam:

Sistemas de logaritmos decimais

É o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos comuns[3] ou de Briggs. Quando a base é 10 costuma-se omitir-se a base na sua representação.

Sistemas de Logaritmos Neperianos

É o sistema de base e (número irracional chamado de número de Euller, e = 2,71827...), também chamado de sistema de logaritmos naturais[4]. O nome neperiano deve-se a J. Napier.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Calcule os logaritmos abaixo:

(a) $\log_2 8$ =

(b) $\log_7 49$ =

(c) $\log_3 81$ =

(d) $\log_7 1$ =

(e) $\log_3 3$ =

(f) $\log_{10} 10^4$ =

(g) $\log_2 2^{-3}$ =

(h) $\log_3 \frac{1}{9}$ =

(i) $lo g_{\frac{1}{5}} 25$ =

(j) $\log_{25} \frac{1}{5}$ =

(k) $\log_2 64$ =

(2) Calcule as seguintes adições abaixo:

(a) $\log_2 16 + \log_3 81 + \log_4 0,25$.

(b) $\log_2 1.024 + \log \frac{1}{5} 625$.

(3) Calcule x nas igualdades:

---

[3] Indicado por $\log_{10} b$ ou $\log b$.
[4] Indicado por lnb que é igual a $\log_e x$.

(a) $\log_2 x = 5$.

(b) $3 = \log_4 x$.

(c) $\log(x + 1) = 2$.

(4) Determine o valor da base a nas seguintes igualdades.

(a) $\log_a 8 = 3$.

(b) $\log_a 81 = 4$.

(c) $\log_a 5 = 1$.

(d) $\log_a 36 = 2$.

(e) $\log_a 4 = -2$

(f) $\log_a 1 = 0$.

(g) $\log_a \frac{1}{16} = 2$.

(h) $\log_a 5 = 2$.

(i) $\log_a 10 = 1$.

Condição de Existência

Para que os logaritmos existam é necessário que em $log_a b = x$, tenha-se:

- Logaritmando ou antilogaritmo positivo *(b > 0).*
- Base positiva *(a > 0).*
- Base diferente de ($a \neq 1$).

Exemplo 3.3: Determinar o domínio da função $f(x) = log_3(x - 3)$.

Resolução:

Uma das condições para que exista o logaritmo é que o logaritmando seja positivo, ou seja:

$$(x - 3) > 0$$

$$x > 3.$$

Portanto, temos: $D = \{x \in \mathbb{R}/x > 3\}$.

Consequência da definição

Exemplo 3.4:

(1) $log_2 1 = x \Leftrightarrow 1 = 2^x \Leftrightarrow 2^0 = 2^x \Leftrightarrow x = 0. Portanto: log_a 1 = 0.$

(2) $log_2 2 = x \Leftrightarrow 2 = 2^x \Leftrightarrow 2^1 = 2^x \Leftrightarrow x = 1.\ Portanto: log_a a = 1.$

(3) $log_2 2^3 = x \Leftrightarrow 2^3 = 2^x \Leftrightarrow x = 3.\ Portanto: log_a a^m = m.$

(4) $2^{log_2 4} = x \Leftrightarrow 2^{log_2 2^2} = 2^2 = 4.\ Portanto: a^{log_a b} = b.$

(5) $log_5 x = log_5 7 \Leftrightarrow x = 7. Portanto: log_a b = log_a x \Leftrightarrow b = x.$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Determine os valores reais de x para que exista:

(a) $log_2\,(x - 8)$.

(b) $log_5(5x - 2) + log_5(x - 3)$.

(c) $log_5(x^2 + 4x - 5)$.

(d) $log_{x^2+1}(x^2 + x - 12)$.

(2) Calcule o valor dos logaritmos:

(a) $log_7 1$.

(b) $log_{0,8} 0{,}8$.

(c) $log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$.

(d) $log_{\frac{1}{3}} 1$.

(e) $log_{0,5} 1$.

(f) $log_{0,1} 0{,}1$.

(g) $log_6 6$.

(h) $log_9 1$.

(3) Calcule o valor dos logaritmos a seguir:

(a) $log_5 5^4$.

(b) $log_2 2^6$.

(c) $log_{10} 10^{-4}$.

(d) $log_\pi \pi^2$.

(e) $log_2 16$.

(f) $log_5\sqrt{5}$.

(g) $log_3 243$.

(h) $log_2\sqrt[5]{2}$.

(4) Calcule o valor das expressões:

(a) $10^{log_{10}3}$.

(b) $2^{log_2 5}$.

(c) $2^{log_2 6.log_6 10}$.

(d) $3^{log_2 7.log_3 2}$.

(e) $10^{3.log_{10}2}$.

(f) $2^{1+log_2 3}$.

(5) Calcule o valor de x:

(a) $log_6 x = log_6 8$.

(b) $log_3 8^x = log_3 16$.

(c) $logx^2 = logx$.

(d) $log_{\frac{1}{5}}(x-1) = log_{\frac{1}{5}}3$.

3.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

(P_1) Logaritmo de um produto

$$log_a(b.c) = log_a b + log_a c$$

Exemplo 3.5:

(a) $log_3(7.2) = log_3 7 + log_3 2$.

(b) $log_2(5.3.7) = log_2 5 + log_2 3 + log_2 7$.

(P_2) Logaritmo de um quociente.

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$$

Exemplo 3.6:

(a) $log_3\left(\frac{7}{2}\right) = log_3 7 - log_3 2$.

(b) $log_5\left(\frac{8}{3}\right) = log_5 8 - log_5 3$.

(P_3) Logaritmo de uma potência.

$$log_a b^m = m. log_a b$$

Exemplo 3.7:

(a) $log_2 5^3 = 3. log_2 5$.

(b) $log_3 4^{-5} = -5. log_3 4$.

MUDANÇA DE BASE

$$log_a b = \frac{log_x b}{log_x a}$$

Exemplo 3.8:

(a) Escrever $log_7 5$ na base 2.

$$log_7 5 = \frac{log_2 5}{log_2 7}$$

(b) Escrever $log_7 5$ na base 10.

$$log_7 5 = \frac{log 5}{log 7}$$

SÍNTESE:

- **Definição de logaritmo**

$$log_a b = x \iff a^x = b$$

- **Consequências da definição**

(a) $log_a = 0$.

(b) $log_a a = 1$.

(c) $log_a a^m = m$.

(d) $a^{log_a b} = b$.

(e) $log_a b = log_a x \iff b = x$.

Exemplo 3.9: Sabendo que $log_2 = 0{,}301$ e $log_3 = 0{,}477$, calcule:

(a) $log6$

Resolução:

Usando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$$log6 \ = log(2.3) = log\,2 + log\,3 = \ 0{,}301 \ + \ 0{,}477 \ = \ 0{,}778.$$

Portanto, $log6 = 0{,}778$.

(b) $log5$

Resolução:

Usando a propriedade do logaritmo de um quociente, temos:

$$log5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = log10 - log2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699.$$

Portanto, $log5 = 0{,}699$.

(c) $log2{,}5$

Resolução:

Usando a propriedade do logaritmo de um quociente e lembrando que $2{,}5 = \frac{25}{10}$, temos: $log2{,}5 = log\,\frac{25}{10} = log\,\frac{5}{2} = log5 - log2 = 0{,}699 - 0{,}301 = 0{,}398$.

Portanto, $log2{,}5 = 0{,}398$.

3.3 EQUAÇÕES LOGARÍTMICA

Definição 3.2 Chama-se equação logarítmica toda equação em que a incógnita aparece no logaritmando, na base ou em ambos.

Para resolver uma equação logarítmica, temos:

(a) Condições de existência;

(b) Definição de logaritmo;

(c) Consequências da definição;

(d) Propriedades operatórias;

(e) Mudança de base;

(f) verificar se o conjunto solução satisfaz a condição de existência.

Exemplo 3.10: Resolva a equação, $log_2(x+2)+log_2(x-2)=5$.

Resolução:

As condições de existência são:

$$x+2\ >0\ \Rightarrow x>-2\ e\ x-2>0\ \Rightarrow x\ >2$$

Usando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$$log_2(x+2).(x-2)=5$$

Pela definição de logaritmo, temos:

$$(x+2).(x-2)=\ 2^5$$

$$x^2-4=32$$

$$x^2\ =32+4$$

$$x^2\ =36$$

$$x=\pm 6.$$

Percebe-se, que somente o valor 6 satisfaz as condições de existência. Logo, $S = \{6\}$.

Exemplo 3.11: Suponha que um carro sofra uma desvalorização de 10% ao ano. Em quanto tempo o valor do carro reduzirá a um terço do valor inicial? (Use log 3 = 0,477).

Resolução:

Vamos chamar de x o valor inicial do carro.

Após 1 ano, seu valor será:

x – 10% de x = x – 0,1x = 0,9x = x . 0,9

Após 2 anos, seu valor será: $(x.0,9).0,9\ =\ x.0,9^2$.

Após 3 anos, seu valor será: $(x.0,9^2).0,9\ =\ x.0,9^3$.

Após 4 anos, seu valor será: $(x.0,9^3).0,9\ =\ x.0,9^4$, assim após t anos, seu valor será: $x.0,9^t$.

Agora, vamos calcular t para que esse valor seja $\frac{x}{3}$, isto é, um terço do valor que era no início.

Logo: $x.0,9^t\ =\ \frac{x}{3}$, dividindo os dois membros por $x\ \neq 0$, temos: $0,9^t\ =\ \frac{1}{3}$.

Para resolver a equação exponencial obtida, vamos aplicar os logaritmos nos dois membros da igualdade. Assim:

$$log0,9^t = log\frac{1}{3}.$$

Usando as propriedades dos logaritmos, temos:

$$t.log0,9 = log\frac{1}{3} \Rightarrow t.log\frac{9}{10} = log\frac{1}{3}$$

$$t.(log9 - log10) = log1 - log3$$

$$t.(log3^2 - log10) = log1 - log3$$

$$t.(2log3 - log10) = log1 - log3$$

$$\mathrm{t}.(2.0,477 - 1) = 0 - 0,477$$

$$0,046.\mathrm{t} = -0,477$$

$$t \cong 10,37\mathrm{anos}.$$

Se 10,37 anos = 10 anos + 0,37 do ano, ou seja, 10 anos + 0,37. 12 meses = 10 anos + 4,44 meses. Portanto o tempo para que o valor do carro se reduza a do valor inicial é de, aproximadamente, 10 anos e 4 meses.

Exemplo 3.12: A escala do pH (potencial hidrogeniônico) é uma escala logarítmica, que varia de 0 a 14, usada para determinar se uma solução é ácida, neutra ou básica (alcalina). Substâncias que apresentam pH menor que 7 são consideradas ácidas, porque há um predomínio de íons de hidrogênio (H^+) sobre os de hidróxido (OH^-), ao passo que substâncias com pH maior que 7 são consideradas básicas, apresentando maior concentração de íons OH^- do que a de H^+. O pH igual a 7 indica que a substância é neutra, pois tem as mesmas concentrações de H^+ e OH^-.

O pH é calculado pela equação logarítmica:

$$pH = -\log[H^+].$$

O pH é um dos fatores que devem ser considerados para se avaliar a qualidade da água. No rótulo de garrafas de água mineral, é comum haver a indicação do seu pH. Recomenda-se que varie de 7 a 10. Considerando que o pH da água pura é neutro, portanto, igual a 7, a água da garrafa cujo rótulo indica pH 8 é considerada ácida ou básica? Qual é a sua concentração de íons H^+ em relação à água pura?

Resolução:

A água com pH 8 é básica.

Se o pH da água pura é 7, então a concentração de íons H^+ é:

$$7 = -\log[H^+]$$

$$[H^+] = 10^{-7}.$$

Para a água cujo pH é 8, a concentração de íons H^+ é igual a:

$$8 = -log[H^+]$$

$$[H^+] = 10^{-8}.$$

Assim, temos: $\frac{10^{-7}}{10^{-8}} = 10^{-1}$.

Portanto, a concentração de íons H^+ da garrafa é 10 vezes menor que a da água pura.

Exemplo 3.13: Resolva em $\mathbb{R}$, e equação $log_2(x-3) = 5$.

Exemplo 3.14: Resolva em $\mathbb{R}$, e equação $log_{x-1}(5x-9) = 2$.

Exemplo 3.15: Resolva em $\mathbb{R}$, e equação $log_5(x-3) + log_5(x+4) = log_5 8$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Resolva as seguintes equações:

(a) $log_2(x-3) = 5$

(b) $log_2(x-4) = 3$

(c) $log_{x-1}(5x-9) = 2$

(d) $log_x(3x^2 - x) = 2$

(e) $log_5(log_3 x) = 1$

(f) $(log_3 x)^2 - log_3 x - 6 = 0$

(2) Admitindo $log\ 2 = 0{,}3\ e\ log\ 3 = 0{,}48$, resolva as equações exponenciais:

(a) $3^x = 2$

(b) $4^x = 3$

(c) $2^x = 9$

(d) $6^x = 8$

(e) $6^x = 20$

(f) $4^x = 0{,}3$

(3) Admitindo $log\ 2 = 0{,}3\ e\ log3 = 0{,}48$, calcule os seguintes logaritmos:

(a) $log6$

(b) $log8$

(c) $log24$

(d) $log300$

(e) $log0{,}2$

(4) Ache o valor das expressões:

(a) $log\ 5 + log\ 200$

(b) $log\ 100 + log\ 50 + log\ 10 + log\ 2$

(c) $log_2 24 - log_2 3$

(d) $log_5 8 + log_5 12{,}5 - log_5 4$

(5) Determine o conjunto solução da equação $log_2(x + 3) + log_2(x - 4) = 3$.

(6) Dados $log\ 2 = 0{,}301\ e\ log\ 3 = 0{,}477$, calcule o valor de x na equação $2^{x-1} + 2^{x-2} = 9$.

(7) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ loga + logb = 2. \end{cases}$$

(8) O lucro mensal, em reais, de uma empresa é expresso pela lei $L(t) = 3.000.(1,5)^t$, sendo $L(t)$ o lucro após t meses.

(a) Qual o lucro dessa empresa após 2 meses? R: R$6.750,00.

(b) Daqui a quantos meses o lucro será de R$36.000, 00? Use $log\, 2 = 0{,}301\; e\; log\, 3 = 0{,}477$.

(9) Suponha que o preço de um carro sofra uma desvalorização de 20% ao ano. Depois de quanto tempo, aproximadamente, seu preço cairá para cerca da metade do preço de um carro novo? Use: $log2 = 0,30$.

(10) Um investidor aplicou R$80.000,00 a juro composto de 2, 2% ao mês.

(a) Daqui a quantos meses, aproximadamente, terá um montante de R$85.400,00?

(b) Após quantos anos terá um montante de R$134.868,80?

(11) Se $\log_{10}(2x-5) = 0$, então x vale:

(a) x = 2 **(b)** x = 3 **(c)** x = 1 **(d)** x = -3

(12) O valor de $\log_2(16) + \log_{16}(2)$ é igual a:

(a) 0 **(b)** $\frac{65}{8}$ **(c)** 1 **(d)** 4 **(e)** $\frac{17}{4}$

(13) A quantia de R$ 1.370,00 foi aplicada em uma instituição financeira que paga juros compostos de 25% ao ano. Após quantos anos esse capital produz o montante de R$ 5.480,00? Considere: $log2 = 0{,}3$ e $log5 = 0{,}7$.

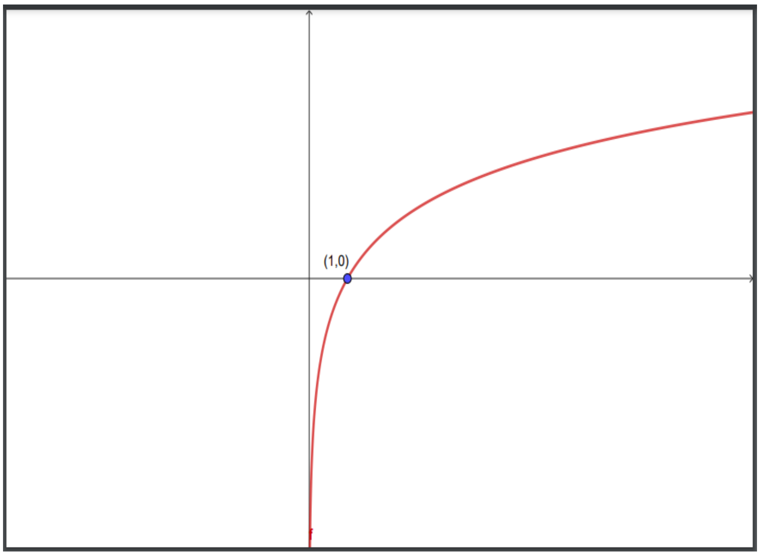
(14) O banco X empresta dinheiro aos clientes cobrando uma taxa de juros compostos de 6% ao mês. Supondo que um cliente pediu um empréstimo de R$ 5.000,00, após quantos meses o montante de sua dívida chegará a R$ 50.000,00? Considere $log1{,}06 = 0{,}025$.

3.4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição 3.3 Chamamos de função logarítmica de base $a, a \in \mathbb{R}_+^*, 0 < a \neq 1$ a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $log_a x$ ou seja, $\begin{cases} f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = log_a x \end{cases}$.

Gráficos da Função Logarítmica

Figura 43 – Gráfico da função $f(x) = log_a x, com\ a > 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 43, podemos afirmar:

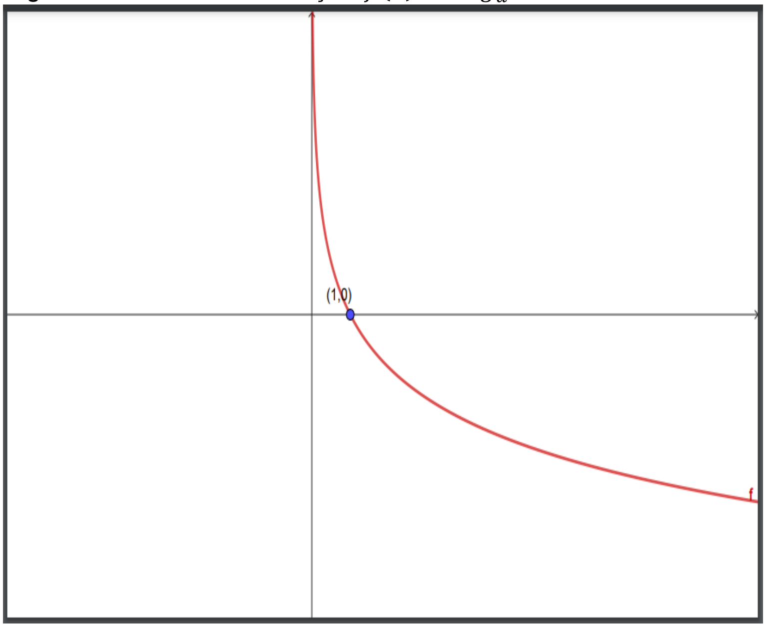
(a) O domínio é dado por: $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

(b) A imagem é dada por: $Im(f) = \mathbb{R}$.

(c) Toda função logarítmica do tipo $f(x) = log_a x$ passa pelo ponto (1,0).

(d) Se $a > 1$, então, o seu gráfico é crescente.

Figura 44 – Gráfico da função $f(x) = log_a x, com\ 0 < a < 1$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 44, podemos afirmar:

(a) O domínio é dado por: $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.

(b) A imagem é dada por: $Im(f) = R$.

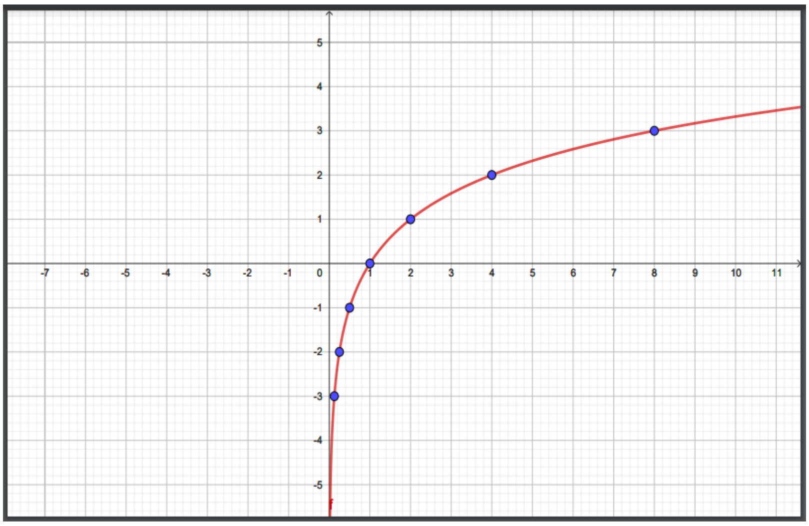
(c) Toda função logarítmica do tipo $f(x) = log_a x$ passa pelo ponto (1, 0).

(d) Se $0 < a < 1$, então, o seu gráfico é decrescente.

Exemplo 3.16: Construa o gráfico da função $f(x) = log_2 x$.

Resolução:

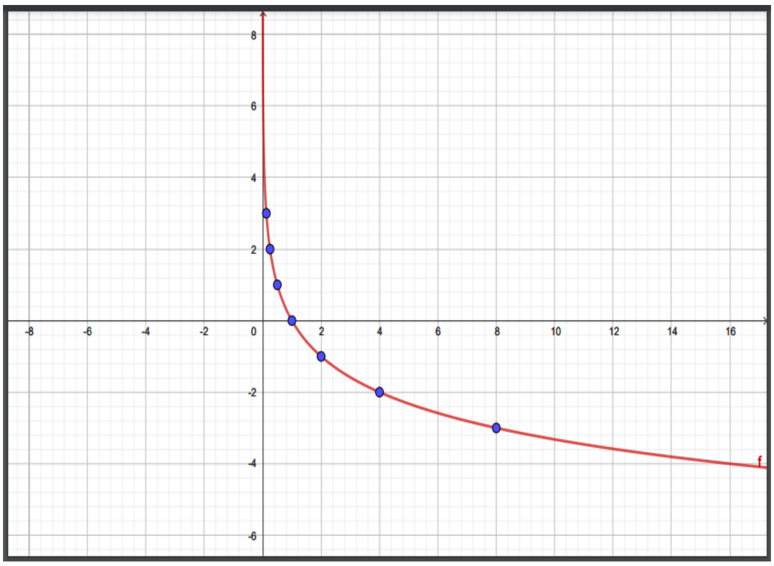
x	x	$f(x)$
2^{-3}	$\frac{1}{8}$	-3
2^{-2}	$\frac{1}{4}$	-2
2^{-1}	$\frac{1}{2}$	-1
2^0	1	0
2^1	2	1
2^2	4	2
2^3	8	3



Exemplo 3.17: Construa o gráfico da função $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$.

Resolução:

x	x	$f(x)$
2^{-3}	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	3
2^{-2}	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	2
2^{-1}	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	1
2^0	1	0
2^1	2	-1
2^2	4	-2
2^3	8	-3



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) As funções logarítmicas f e g são dadas por $f(x) = log_3 x \; e \; g(x) = log_4 x$. Determine:

(a) $f(9)$

(b) $g(1)$

(c) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

(d) $D(f)$

(e) $Im(f)$

(f) $f(27) + g(16)$

(2) Dados $f(x) = log_3(x + 1), g(x) = 4 + log_2 x \; e \; h(x) = log 2x,$ determine:

(a) $f(2)$

(b) $g(2)$

(c) $h(5)$

(d) $h(50)$

(e) $g(1)$

(f) $f(0)$

(3) Construa os gráficos das seguintes funções logarítmicas:

(a) $f\ (x) = log_3 x$

(b) $f\ (x) = log_{\frac{1}{3}} x$

(4) Construa, num mesmo sistema de eixos, os gráficos de:

(a) $f(x) = \ 2^x \; e \; f(x) = log_2 x$

(b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \; e \; f\ (x) = log_{\frac{1}{2}} x$

CAPÍTULO 4 – FUNÇÃO MODULAR

4.1 DEFINIÇÃO DE MÓDULO

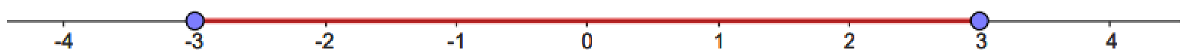
Definição 4.1 O módulo ou valor absoluto de um número x, que indicamos por $|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$.

Dessa forma:

- Se x é positivo, o módulo de x é igual a x.
- Se x é negativo, o módulo de x é o seu oposto, $-x$.
- O módulo de um número real é sempre maior ou igual a zero, $|x| \geq 0, \forall\ x$.

O módulo de um número pode ser representado na reta numérica real. Ele indica a distância de um número na reta à origem.

Exemplo 4.1:



(a) $|-3| = 3$, pois, a distância do número -3 à 0 é de 3 unidades.

(b) $|3| = 3$, pois, a distância do número 3 à 0 é de 3 unidades.

Exemplo 4.2:

(a) $|2| = 2$, pois, $2 > 0$

(b) $|-5| = -(-5) = 5$, pois, $-5 < 0$

(c) $|0| = 0$

(d) $|-\sqrt{5}| = -\sqrt{5}$

(e) $\sqrt{x^2} = x^2$

PROPRIEDADES

(P_1) $|x| \geq 0, \forall\, x$.

(P_2) $|x| = |-x|$, para qualquer número x.

(P_3) $|x.y| = |x|.|y|$, para quaisquer números reais x e y.

- Se $x > 0$ e $y > 0$, então $|x.y| = xy$ e $|x|.|y| = xy$;
- Se $x > 0$ e $y < 0$, então $|x.y| = -xy$ e $|x|.|y| = -xy$;
- Se $x < 0$ e $y > 0$, então $|x.y| = xy$ e $|x|.|y| = -xy$;
- Se $x < 0$ e $y < 0$, então $|x.y| = xy$ e $|x|.|y| = xy$.

(P_4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, para quaisquer números reais x e y, com $y \neq 0$.

(P_5) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Calcule os módulos a seguir, dados os valores, $\sqrt{2} \cong 1{,}41, \sqrt{3} \cong 1{,}73, \sqrt{5} \cong 2{,}24, \pi \cong 3{,}14$.

(a) $\left|6 - \sqrt{5}\right|$

(b) $\left|2 + \sqrt{3}\right|$

(c) $|4 - \pi|$

(d) $\left|\sqrt{2} - 3\right|$

(2) Construa o gráfico da seguinte função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & se\ x \geq 0 \\ -2x, & se\ x < 0 \end{cases}$ e determine o valor de $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.

(3) Dadas as funções $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, se\ x \leq 3 \\ x^2 + 2, se\ x > 3 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, se\ x < 1 \\ -x, se\ x \geq 1 \end{cases}$, calcule:

(a) $f(3) - g(5)$

(b) $g(0) + 2.f(-1)$

(c) $\frac{f(4)}{g(1)}$

(4) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, se\ x < 0 \\ x - 2, se\ x \geq 0 \end{cases}$. Determine os possíveis valores de x para:

(a) $f(x) = 0$

(b) $f(x) = -2$

(5) De acordo com a definição de módulo, calcule:

(a) $|4 - 7|$

(b) $|-2 + 4|$

(c) $|-1 - 5|$

(d) $|-2| + |-8|$

(e) $|-3| - |-15|$

(6) Aplicando a definição de módulo, determine o valor numérico de:

(a) $3x - |x|$, para $x = -3$.

(b) $\left|\frac{2x+1}{4+3x}\right|$, para $x = -2$.

(c) $|2x^3 + x^2 - x + 1| - |x^2 - 2x + 3|$, para $x = 2$.

4.2 EQUAÇÕES MODULARES

Definição 4.2 Equações modulares são igualdades que apresentam o módulo em pelo menos um dos membros que contém a incógnita.

Exemplo 4.2: Resolva em $\mathbb{R}$**.**

(a) $|3x + 6| = 2$

Resolução:

$$|3x + 6| = 2 \ \to \begin{cases} 3x + 6 = 2 \to 3x = -4 \to x = -\frac{4}{3} \\ -(3x + 6) = 2 \to -3x - 6 = 2 \to -3x = 8 \to x = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Encontramos duas possibilidades de solução. Entretanto, ambas precisam ser verificadas.

- Verificando $x = -\frac{8}{3}$.

$$\left|3.\left(-\frac{8}{3}\right)+6\right| = 2$$

$$|-8+6| = 2$$

$$|-2| = 2.$$

Dessa forma, percebe-se que $-\frac{8}{3}$ é raiz da equação.

- Verificando $x = -\frac{4}{3}$.

$$\left|3.\left(-\frac{4}{3}\right)+6\right| = 2$$

$$|-4+6| = 2$$

$$|2| = 2.$$

Dessa forma, percebe-se que $-\frac{4}{3}$ é raiz da equação. Assim, a solução é $S = \left\{-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$.

(b) $|x+4| = -3x+5$

Resolução:

$$|x+4| = -3x+5 \ \rightarrow \begin{cases} x+4 = -3x+5 \rightarrow 4x = 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{4} \\ -(x+4) = -3x+5 \rightarrow -x-4 = -3x+5 \rightarrow x = \dfrac{9}{2} \end{cases}.$$

Encontramos duas possibilidades de solução. Entretanto, ambas precisam ser verificadas.

- Verificando $x = \frac{9}{2}$.

$$\left|\frac{9}{2}+4\right| = -3.\left(\frac{9}{2}\right)+5$$

$$\left|\frac{17}{2}\right| = -\frac{27}{2}+5$$

$$\left|\frac{17}{2}\right| = -\frac{17}{2}$$

Dessa forma, percebe-se que $\frac{9}{2}$ não é raiz da equação.

- Verificando $x = \frac{1}{4}$.

$$\left|\frac{1}{4}+4\right| = -3.\left(\frac{1}{4}\right)+5$$

$$\left|\frac{17}{2}\right| = -\frac{3}{4} + 5$$

$$\left|\frac{17}{2}\right| = \frac{17}{2}$$

Dessa forma, percebe-se que $\frac{1}{4}$ é raiz da equação. Assim, a solução é $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

(c) $|2x + 1| = |x + 3|$

Resolução:

$$|2x + 1| = |x + 3| \ \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x + 3 \rightarrow x = 2 \rightarrow x = 2 \\ 2x + 1 = -(x + 3) \rightarrow 3x = -4 \rightarrow x = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Encontramos duas possibilidades de solução. Entretanto, ambas precisam ser verificadas.

- Verificando $x = 2$.

$$|2.2 + 1| = |2 + 3|$$

$$|5| = |5|$$

$$5 = 5$$

Dessa forma, percebe-se que 2 é raiz da equação.

- Verificando $x = -\frac{4}{3}$.

$$\left|2.\left(-\frac{4}{3}\right) + 1\right| = \left|-\frac{4}{3} + 3\right|$$

$$\left|-\frac{8}{3} + 1\right| = \left|\frac{5}{3}\right|$$

$$\left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Dessa forma, percebe-se que $-\frac{4}{3}$ é raiz da equação. Assim, a solução é $S = \left\{2, -\frac{4}{3}\right\}$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:

(a) $|x+3| = 7$

(b) $|2x-1| = |x+2|$

(c) $|3x+9| = x+1$

(d) $|-x-4| = -2$

4.3 INEQUAÇÕES MODULARES

Definição 4.3 Inequações modulares são desigualdades que apresentam o módulo em pelo menos um dos membros que contém a incógnita.

OBSERVAÇÕES:

(1) Representação de todos os números reais menores ou maiores a a.

(a) $x < a$:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ ou $S =]-\infty, a[$.

(b) $x > a$:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ ou $S =]a, +\infty[$.

(2) Representação de todos os números reais menores ou iguais ou maiores ou iguais a a.

(a) $x \leq a$:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ ou $S =]-\infty, a]$.

(b) $x \geq a$:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ ou $S = [a, +\infty[$.

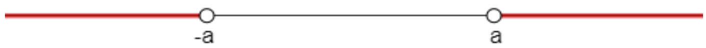
PROPRIEDADES

(P_1) $Se\ |x| \leq a$, então: $-a \leq x \leq a$.

(P_2) $Se\ |x| < a$, então: $-a < x < a$.

(P_3) $Se\ |x| \geq a$, então: $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

(P_4) $Se\ |x| > a$, então: $x < -a$ ou $x > a$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Represente na reta real a solução das seguintes inequações:

(a) $|x| < 5$

(b) $|x| \leq \frac{3}{2}$

(c) $|x| > 2$

(d) $|x| \geq \frac{1}{4}$

(2) Quantos são os números inteiros que satisfazem a inequação $|x - 5| \leq 6$?

(3) Encontre o conjunto solução da inequação modular $|x^2 + 4x - 2| < 10$.

4.4 FUNÇÃO MODULAR

Definição 4.4 A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real ao seu módulo definida por $f(x) = |x|$ chama-se função modular ou função módulo.

A função modular pode ser escrita da seguinte maneira: $f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$.

O domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é dado por $Im(f) = [0, +\infty[$.

Exemplo 4.3: Construa o gráfico da função $f(x) = |x|$.

Resolução:

Para construir o gráfico da função $f(x) = |x|$ temos duas condições:

- Se $x \geq 0$, então, $f(x) = x$.

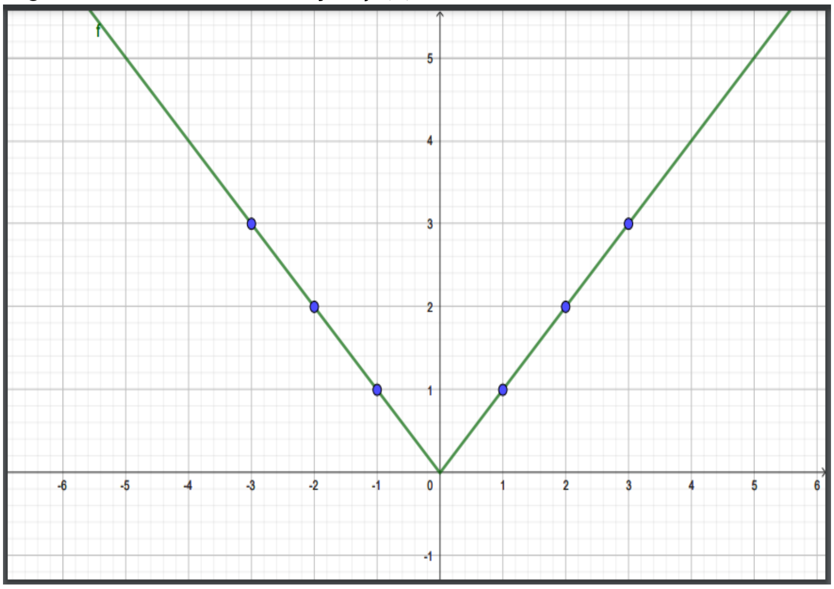
x	$f(x)$	(x, y)
0	0	• (0,0)
1	1	(1,1)
2	2	(2,2)
3	3	(3,3)

Para construir o gráfico da função $f(x) = |x|$ temos duas condições:

- Se $x < 0$, então, $f(x) = -x$.

x	$f(x)$	(x, y)
0	0	o (0,0)
-1	1	(1,1)
-2	2	(2,2)
-3	3	(3,3)

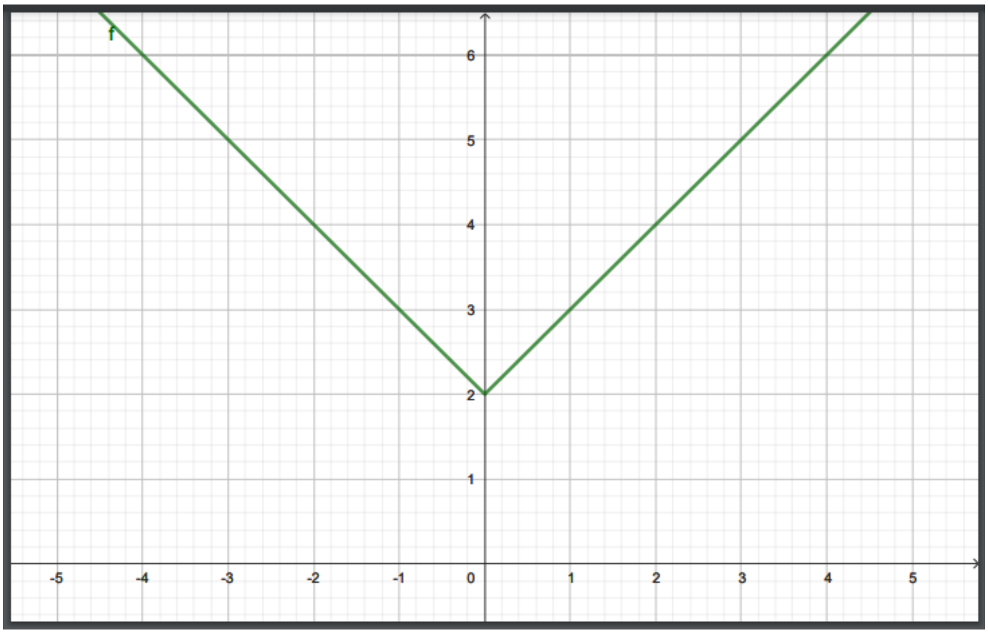
Figura 45 – Gráfico da função $f(x) = |x|$



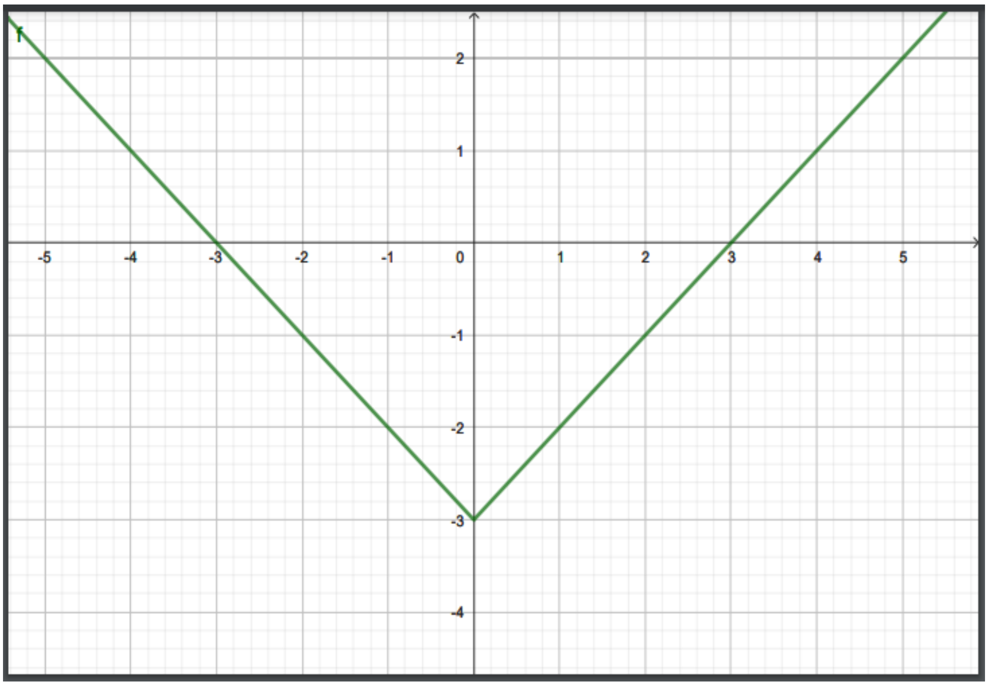
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Exemplo 4.4: Construa o gráfico da função $f(x) = |x| + 2$.

Resolução:



Exemplo 4.5: Construa o gráfico da função $f(x) = |x| - 3$.



Exemplo 4.6: Construa o gráfico da função $f(x) = |x + 2|$.

Resolução:

Para construir o gráfico da função $f(x) = |x + 2|$ temos duas condições:

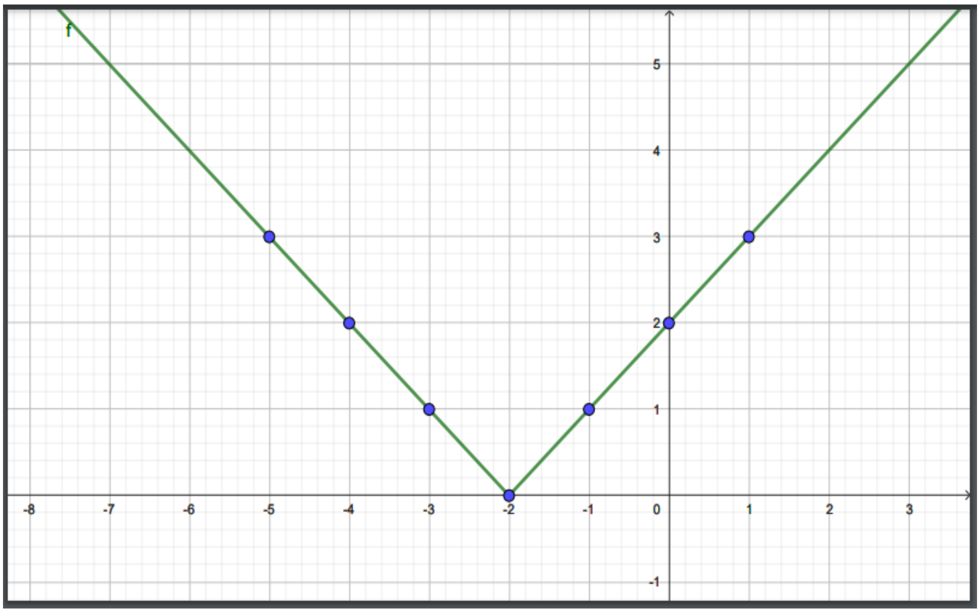
- Se $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$, temos: $f(x) = x + 2$.

x	$f(x)$	(x,y)
-2	0	• $(-2,0)$
-1	1	$(-1,1)$
0	2	$(0,2)$
1	3	$(1,3)$

Para construir o gráfico da função $f(x) = |x|$ temos duas condições:

- Se $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$, temos: $f(x) = -x - 2$.

x	$f(x)$	(x,y)
-2	0	o $(-2,0)$
-3	1	$(-3,1)$
-4	2	$(-4,2)$
-5	3	$(-5,3)$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Construa o gráfico da função $g(x) = |x^2 - 5x + 4|$.

(2) Uma bola é arremessada a partir do ponto (0,4) e, no ar, segue a trajetória dada pela curva $y = |-x^2 + 4|$. Faça o gráfico da parábola para x variando de 0 a 3m, e determine o primeiro ponto em que ela quica no chão.

(3) Construa o gráfico das funções a seguir.

(a) $f(x) = |x - 1|$

(b) $f(x) = |x + 2| - 3$

(c) $f(x) = |x| + 1$

(d) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$

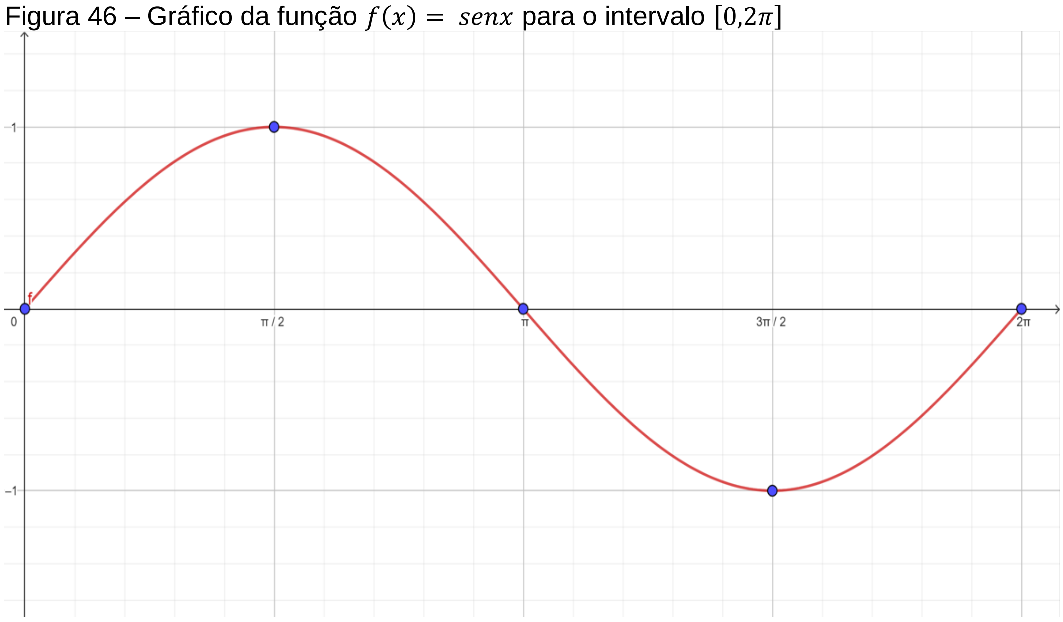
CAPÍTULO 5 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

5.1 FUNÇÃO SENO

Definição 5.1 Chamamos de função seno a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $senx$ ou seja, $\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = senx \end{cases}$.

Note que o domínio e o contradomínio são iguais a $\mathbb{R}$. Para representar o gráfico da função seno, deve-se estudar as extremidades dos arcos notáveis do ciclo trigonométrico. Entretanto, vamos restringir a análise dos arcos no intervalo $[0{,}2\pi]$ e obter alguns pontos (x, y) no plano cartesiano.

Figura 46 – Gráfico da função $f(x) = senx$ para o intervalo $[0{,}2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 46, podemos afirmar:

(a) O domínio é dado por: $D(f) = \mathbb{R}$.

(b) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \mathbb{R}$.

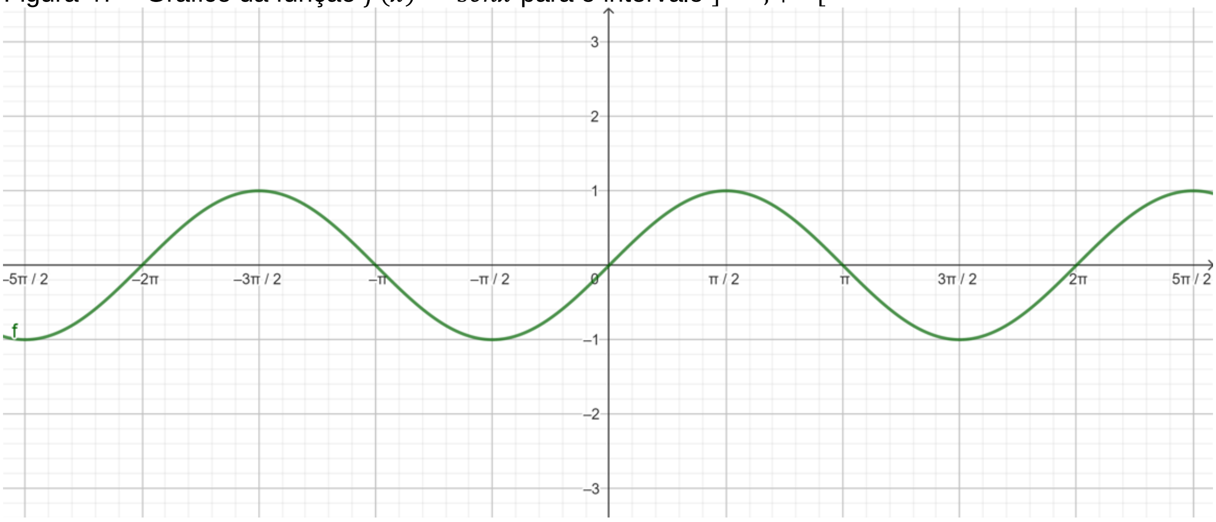
(c) A imagem é dada por: $Im = [-1{,}1]$.

(d) A função $f(x)$ é crescente nos intervalos: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

(e) A função $f(x)$ é decrescente nos intervalos: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

Pela definição, o domínio é $\mathbb{R}$. Assim, podemos considerar os valores negativos para x e valores maiores que 2π para representar o gráfico da função $f(x) = senx$. Dessa forma, segue o gráfico da função $f(x)$ para o domínio $\mathbb{R}$.

Figura 47 – Gráfico da função $f(x) = senx$ para o intervalo $]-\infty, +\infty[$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 47, podemos afirmar:

(a) O domínio é dado por: $D(f) = \mathbb{R}$.

(b) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \mathbb{R}$.

(c) A imagem é dada por: $Im = [-1,1]$.

(d) A função seno é uma função ímpar, pois, $sen(-x) = -sen(x)$.

(e) O período da função seno é $P = 2\pi$, pois, $senx = sen(x + 2\pi) = sen(x + 4\pi) = \cdots$.

De modo geral, temos:

- O período da função do tipo $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, é dado por:

$$P = \frac{2\pi}{|c|}.$$

- A amplitude da função do tipo $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, é dado por:

$$A = |b|.$$

- A imagem da função do tipo $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, é dada por:

$$Im(f) = [a - |b|; a + |b|].$$

Exemplo 5.1: Faça o esboço do gráfico das funções em que $x \in [0,2\pi]$ e determine a imagem, período e amplitude em cada caso.

(a) $f(x) = senx$

Resolução:

x	$f(x) = senx$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1
2π	0

Em relação ao gráfico, figura 46, podemos afirmar:

$$Im(f) = [-1,1];$$

$$P = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi;$$

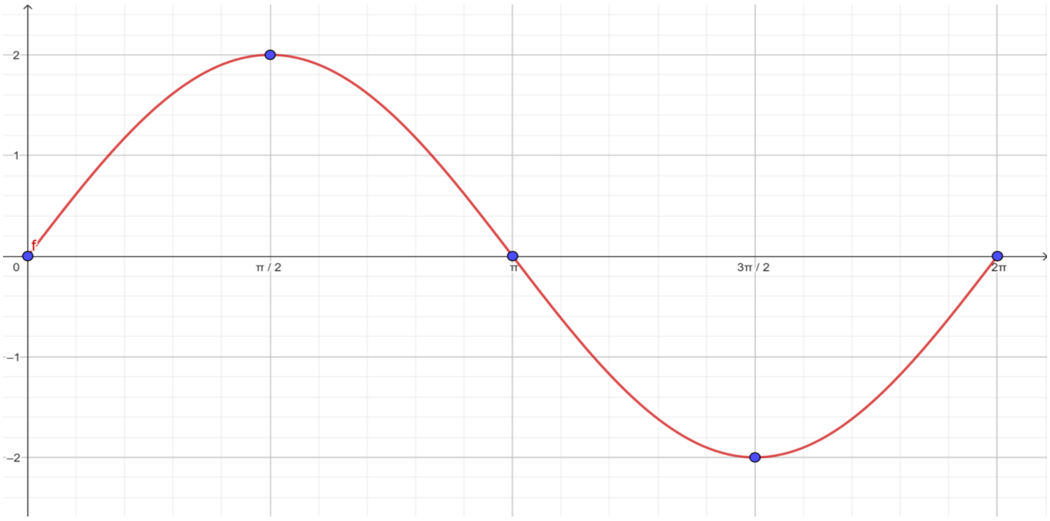
$$A = |1| = 1.$$

(b) $f(x) = 2.senx$

Resolução:

x	$senx$	$f(x) = 2.senx$
0	0	$2.0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	1	$2.1 = 2$
π	0	$2.0 = 0$
$\frac{3}{2}\pi$	-1	$2.(-1) = -2$
2π	0	$2.0 = 0$

Figura 48 – Gráfico da função $f(x) = 2senx$ para o intervalo $[0{,}2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 48, podemos afirmar:

$$Im(f) = [-2{,}2];$$

$$P = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi;$$

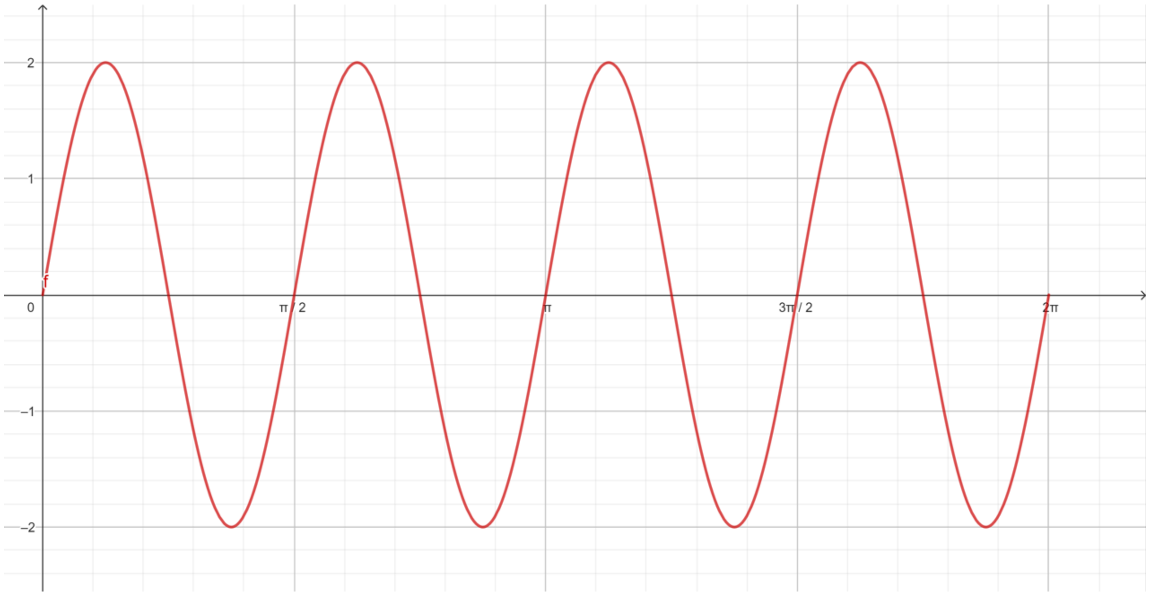
$$A = |2| = 2.$$

(c) $f(x) = 2.sen(4x)$

Resolução:

$4x$	x	$sen(4\pi)$	$f(x) = 2.sen(4x)$
0	0	0	$2.0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1	$2.1 = 2$
π	$\frac{\pi}{4}$	0	$2.0 = 0$
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	-1	$2.(-1) = -2$
2π	$\frac{\pi}{2}$	0	$2.0 = 0$

Figura 49 – Gráfico da função $f(x) = 2sen(4x)$ para o intervalo $[0,2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 49, podemos afirmar:

$$Im(f) = [-2,2];$$

$$P = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2};$$

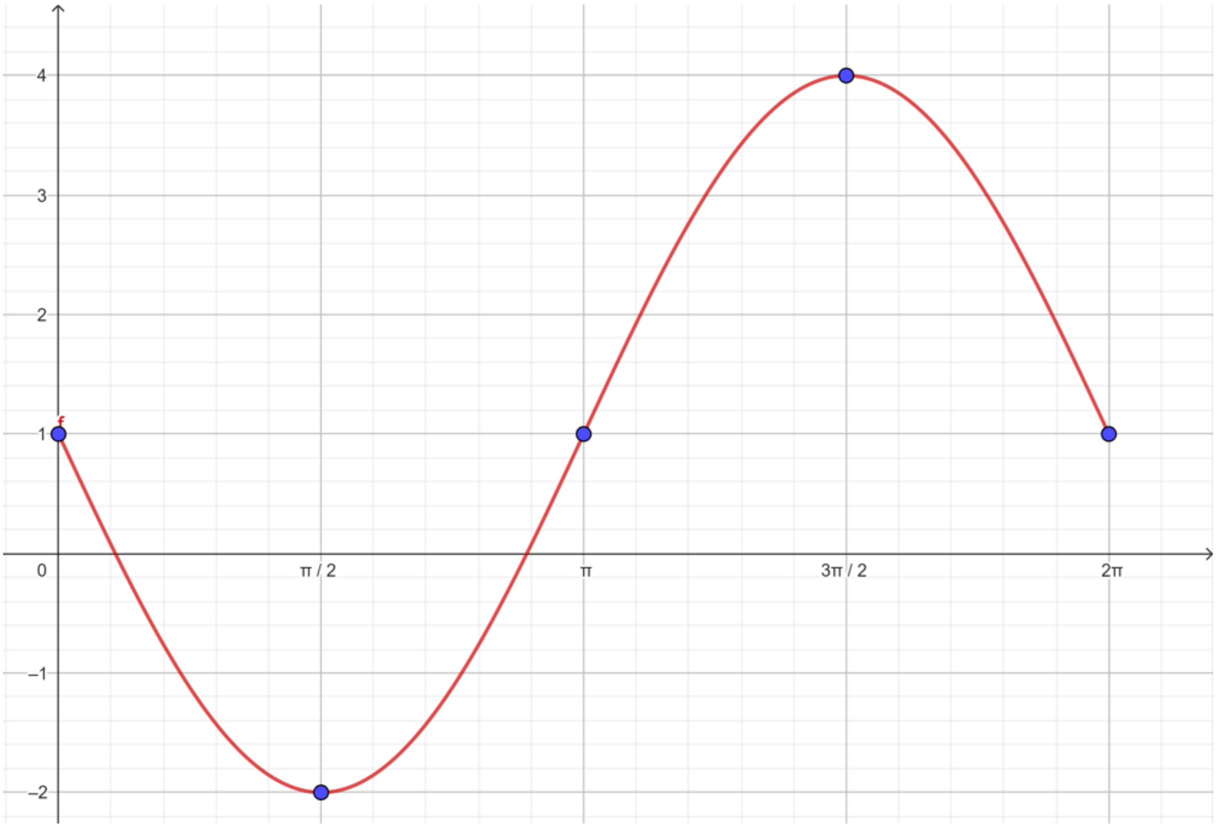
$$A = |2| = 2.$$

(d) $f(x) = 1 + 3.sen(2x + \pi)$

Resolução:

$2x + \pi$	x	$sen(2x+\pi)$	$f(x) = 1 + 3.sen(2x + \pi)$
0	0	0	$1 + 3.0 = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	1	$1 + 3.1 = 4$
π	0	0	$1 + 3.0 = 1$
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{\pi}{4}$	-1	$1 + 3.(-1) = -2$
2π	$\frac{\pi}{2}$	0	$1 + 3.0 = 1$

Figura 50 – Gráfico da função $f(x) = 1 + 3.sen(2x + \pi)$ para o intervalo $[0,2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 50, podemos afirmar:

$$Im(f) = [-2,4];$$

$$P = \frac{2\pi}{|2|} = \pi;$$

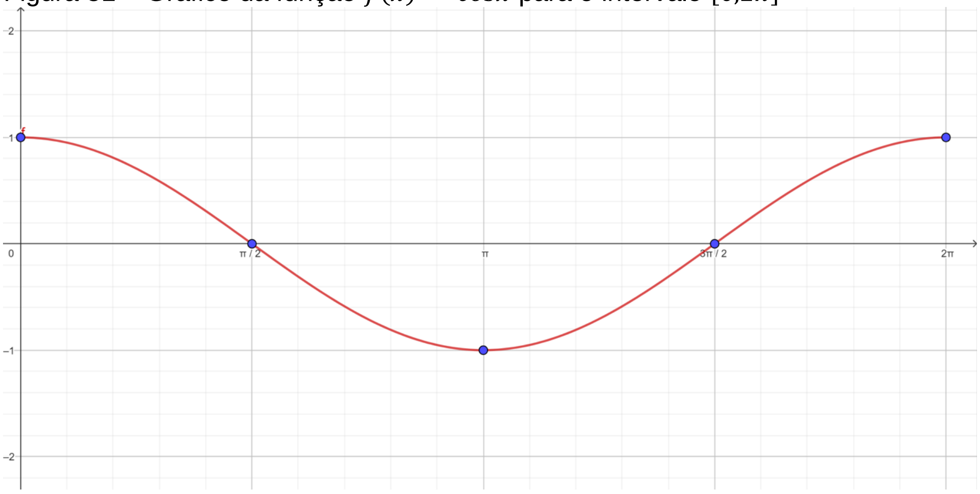
$$A = |3| = 3.$$

5.2 FUNÇÃO COSSENO

Definição 5.2 Chamamos de função cosseno a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $senx$ ou seja, $\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = cosx \end{cases}$.

Note que o domínio e o contradomínio são iguais a $\mathbb{R}$. Para representar o gráfico da função cosseno, deve-se estudar as extremidades dos arcos notáveis do ciclo trigonométrico. Entretanto, vamos restringir a análise dos arcos no intervalo $[0,2\pi]$ e obter alguns pontos (x, y) no plano cartesiano.

Figura 51 – Gráfico da função $f(x) = cosx$ para o intervalo $[0,2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 51, podemos afirmar:

(a) O domínio é dado por: $D(f) = \mathbb{R}$.

(b) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \mathbb{R}$.

(c) A imagem é dada por: $Im = [-1,1]$.

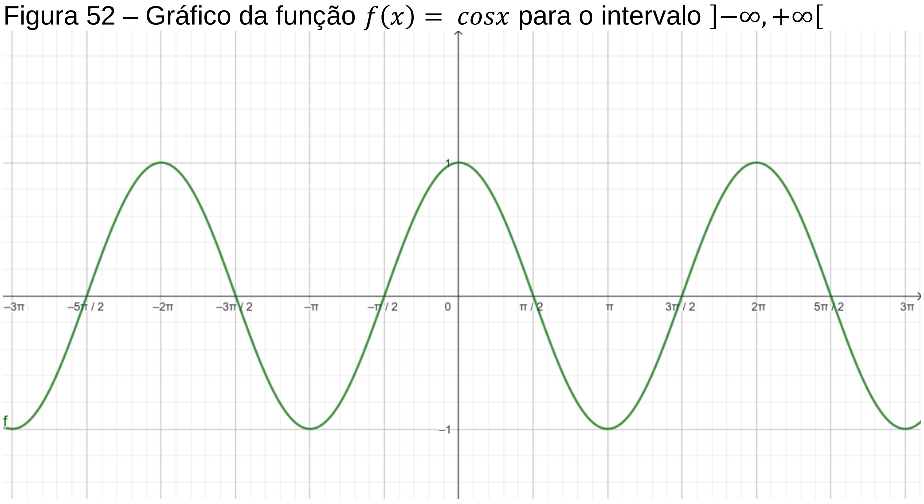
(d) A função $f(x)$ é decrescente nos intervalos: $[0, \pi]$.

(e) A função $f(x)$ é crescente nos intervalos: $[\pi, 2\pi]$.

Pela definição, o domínio é $\mathbb{R}$. Assim, podemos considerar os valores negativos para x e valores maiores que 2π para representar o gráfico da função $f(x) = cosx$.

Dessa forma, segue o gráfico da função $f(x)$ para o domínio $\mathbb{R}$.

Figura 52 – Gráfico da função $f(x) = cosx$ para o intervalo $]-\infty, +\infty[$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 52, podemos afirmar:

(a) O domínio é dado por: $D(f) = \mathbb{R}$.

(b) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \mathbb{R}$.

(c) A imagem é dada por: $Im = [-1,1]$.

(d) A função seno é uma função par, pois, $cos(-x) = cos(x)$.

(e) O período da função seno é $P = 2\pi$, pois, $cosx = cos(x + 2\pi) = cos(x + 4\pi) = \cdots$.

De modo geral, temos:

- O período da função do tipo $f(x) = a + b.cos(cx + d)$, é dado por:

$$P = \frac{2\pi}{|c|}.$$

- A amplitude da função do tipo $f(x) = a + b.cos(cx + d)$, é dado por:

$$A = |b|.$$

- A imagem da função do tipo $f(x) = a + b.cos(cx + d)$, é dada por:

$$Im(f) = [a - |b|; a + |b|].$$

Exemplo 5.2: Faça o esboço do gráfico das funções em que $x \in [0,2\pi]$ e determine a imagem, período e amplitude em cada caso.

(a) $f(x) = cosx$

Resolução:

x	$f(x) = cosx$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3}{2}\pi$	0
2π	1

Em relação ao gráfico, figura 51, podemos afirmar:

$$Im(f) = [-1,1];$$

$$P = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi;$$

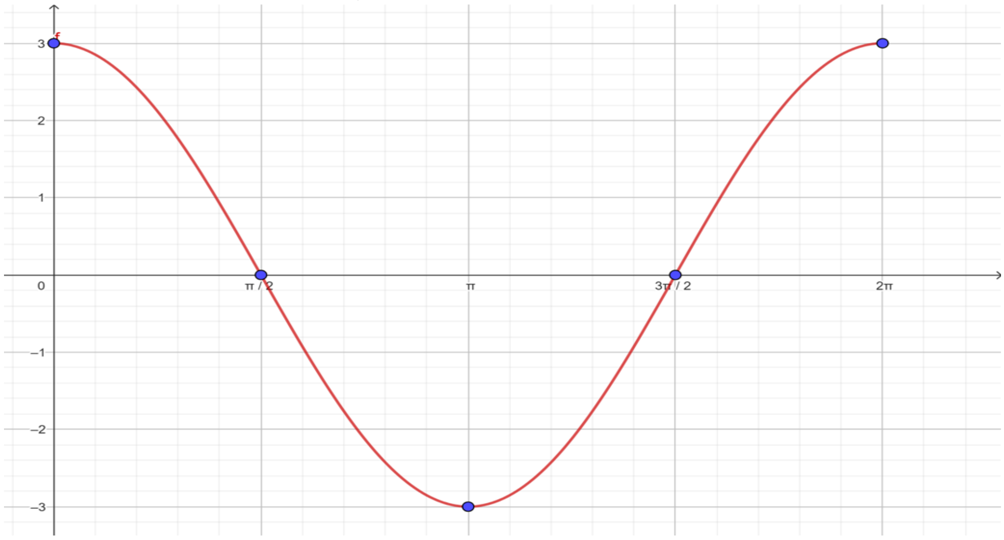
$$A = |1| = 1.$$

(b) $f(x) = 3.cosx$

Resolução:

x	$cosx$	$f(x) = 3.cosx$
0	1	$3.1 = 3$
$\frac{\pi}{2}$	0	$3.0 = 0$
π	-1	$3.(-1) = -3$
$\frac{3}{2}\pi$	-1	$3.0 = 0$
2π	1	$3.1 = 3$

Figura 53 – Gráfico da função $f(x) = 3.cosx$ para o intervalo $[0,2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 53, podemos afirmar:

$$Im(f) = [-3,3];$$

$$P = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi;$$

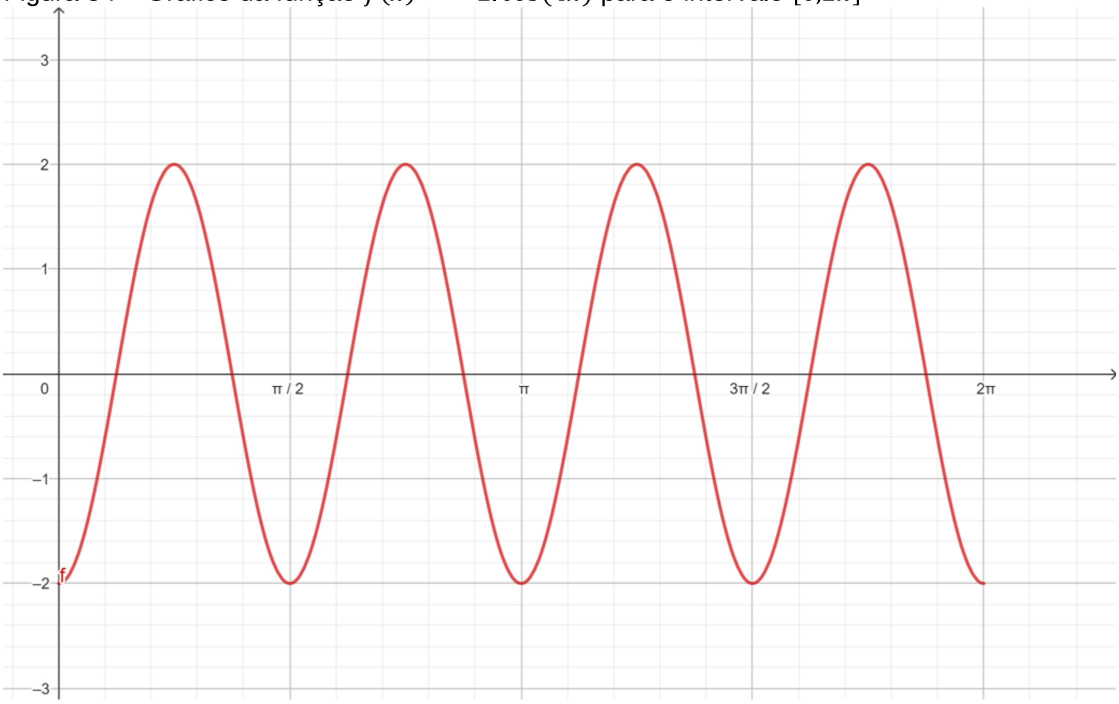
$$A = |3| = 3.$$

(c) $f(x) = -2.cos(4x)$

Resolução:

$4x$	x	$cos(4\pi)$	$f(x) = -2.cos(4x)$
0	0	1	$-2.1 = -2$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	0	$-2.0 = 0$
π	$\frac{\pi}{4}$	-1	$-2.(-1) = 2$
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	0	$-2.0 = 0$
2π	$\frac{\pi}{2}$	1	$-2.1 = -2$

Figura 54 – Gráfico da função $f(x) = -2.cos(4x)$ para o intervalo $[0,2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 54, podemos afirmar:

$$Im(f) = [-2,2];$$

$$P = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2};$$

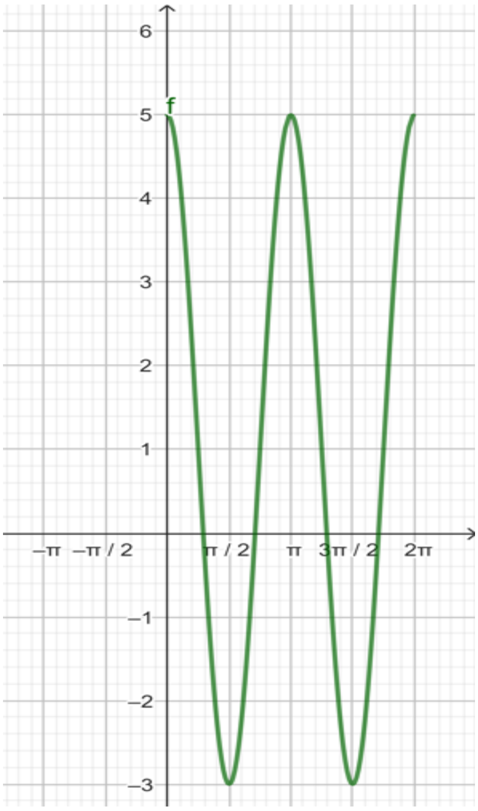
$$A = |-2| = 2.$$

(d) $f(x) = 1 - 4.cos(2x + \pi)$

Resolução:

$2x + \pi$	x	$cos(2x+\pi)$	$f(x) = 1 - 4.cos(2x+\pi)$
0	$-\frac{\pi}{2}$	1	$1 - 4.1 = -3$
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$1 - 4.0 = 1$
π	0	-1	$1 - 4.(-1) = 5$
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{\pi}{4}$	0	$1 - 4.0 = 1$
2π	$\frac{\pi}{2}$	1	$1 - 4.1 = -3$

Figura 55 – Gráfico da função $f(x) = 1 - 4.\cos(2x+\pi)$ para o intervalo $[0,2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 55, podemos afirmar:

$$Im(f) = [-3,5];$$

$$P = \frac{2\pi}{|2|} = \pi;$$

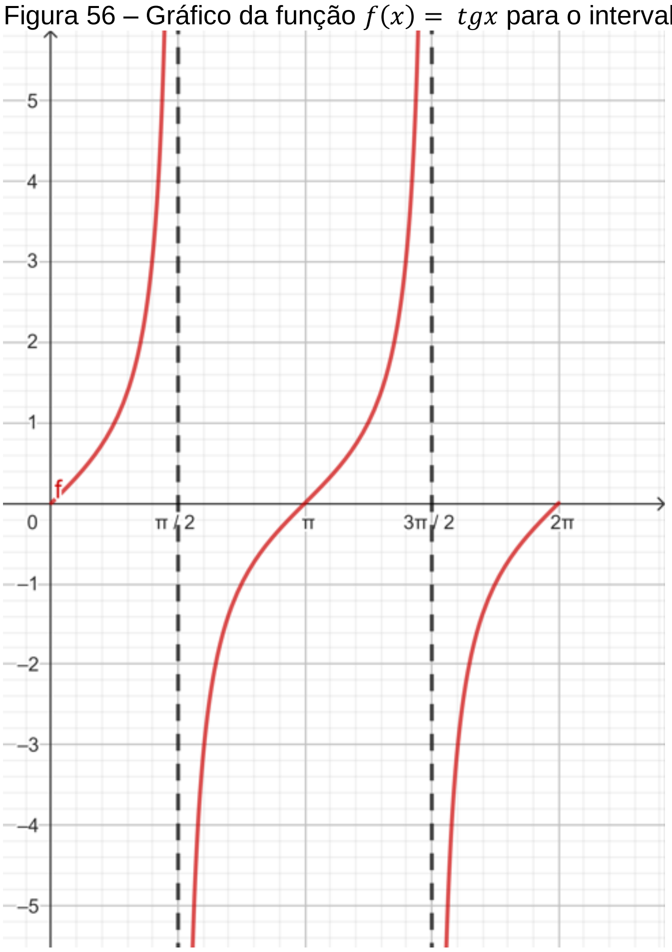
$$A = |-4| = 4.$$

5.3 FUNÇÃO TANGENTE

Definição 5.3 Chamamos de função tangente a função f de D em $\mathbb{R}$ que associa a cada $x \in D$ o número tgx ou seja, $\begin{cases} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \to y = tgx \end{cases}$.

Note que o domínio e o contradomínio não são iguais. O domínio é dado por $D = \left\{x \in \frac{\mathbb{R}}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Para representar o gráfico da função tangente, deve-se estudar as extremidades dos arcos notáveis do ciclo trigonométrico. Entretanto, vamos restringir a análise dos arcos no intervalo $[0,2\pi]$ e obter alguns pontos (x, y) no plano cartesiano.

Figura 56 – Gráfico da função $f(x) = tgx$ para o intervalo $[0,2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 56, podemos afirmar:

(a) O domínio é dado por: $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(b) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \mathbb{R}$.

(c) A imagem é dada por: $Im = \mathbb{R}$.

(d) O período é dado por: $P = \pi$.

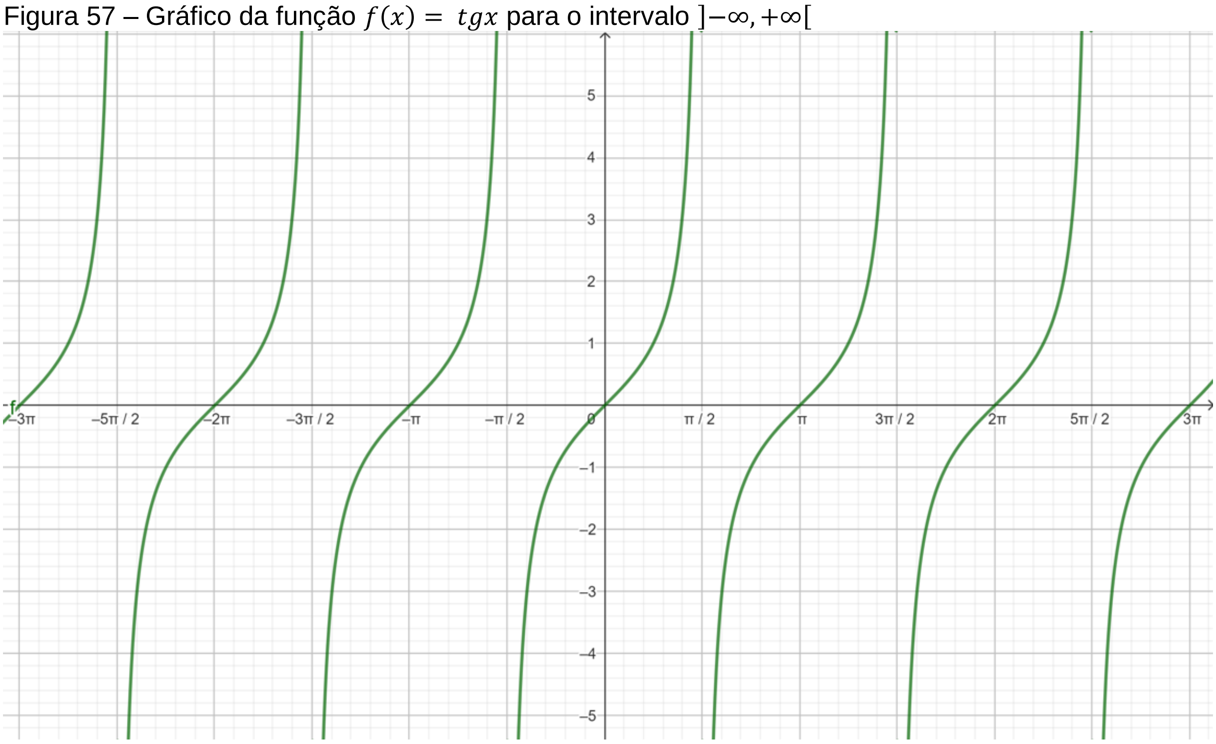
(e) A função tangente é positiva nos intervalos: $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ ou \ \left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$.

(f) A função tangente é negativa nos intervalos: $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\ ou \ \left]\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right[$.

(g) O valor da $tg\frac{\pi}{2}$ e $tg\frac{3}{2}\pi$ não existe.

Podemos considerar os valores negativos para x e valores maiores que 2π para representar o gráfico da função $f(x) = tgx$. Dessa forma, segue o gráfico da função $f(x)$ para o domínio D.

Figura 57 – Gráfico da função $f(x) = \ tgx$ para o intervalo $]-\infty, +\infty[$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 57, podemos afirmar:

(a) O domínio é dado por: $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ com \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(b) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \mathbb{R}$.

(c) A imagem é dada por: $Im = \mathbb{R}$.

(d) A função tangente é uma função ímpar, pois, $tg(-x) = -tgx$.

(e) O período da função tgx é $P = \pi$, pois, $tgx = tg(x + 2\pi) = tg(x + 4\pi) = \cdots$.

De modo geral, temos:

- O período da função do tipo $f(x) = a + b.tg(cx + d)$, é dado por:

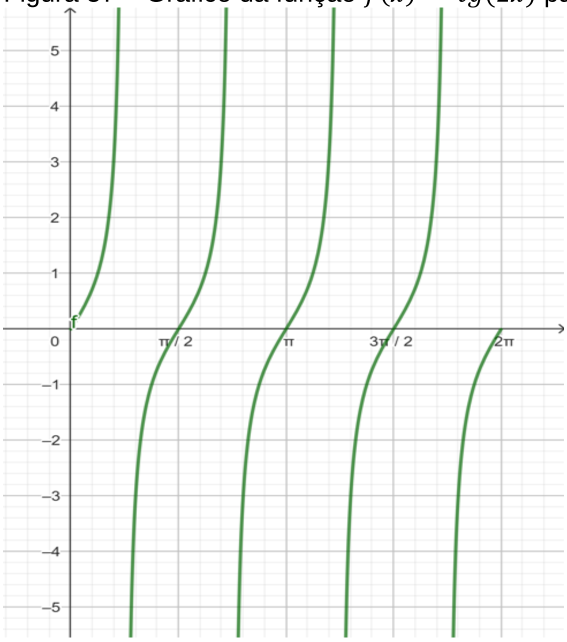
$$P = \frac{\pi}{|c|}.$$

Exemplo 5.3: Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = tg(2x)$ em que $x \in [0,2\pi]$ e determine a imagem e o período.

Resolução:

$2x$	x	$f(x) = tg(2x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\nexists$
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\nexists$
2π	π	0

Figura 57 – Gráfico da função $f(x) = tg(2x)$ para o intervalo $[0,2\pi]$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 57, podemos afirmar:

$$Im(f) = \mathbb{R};$$

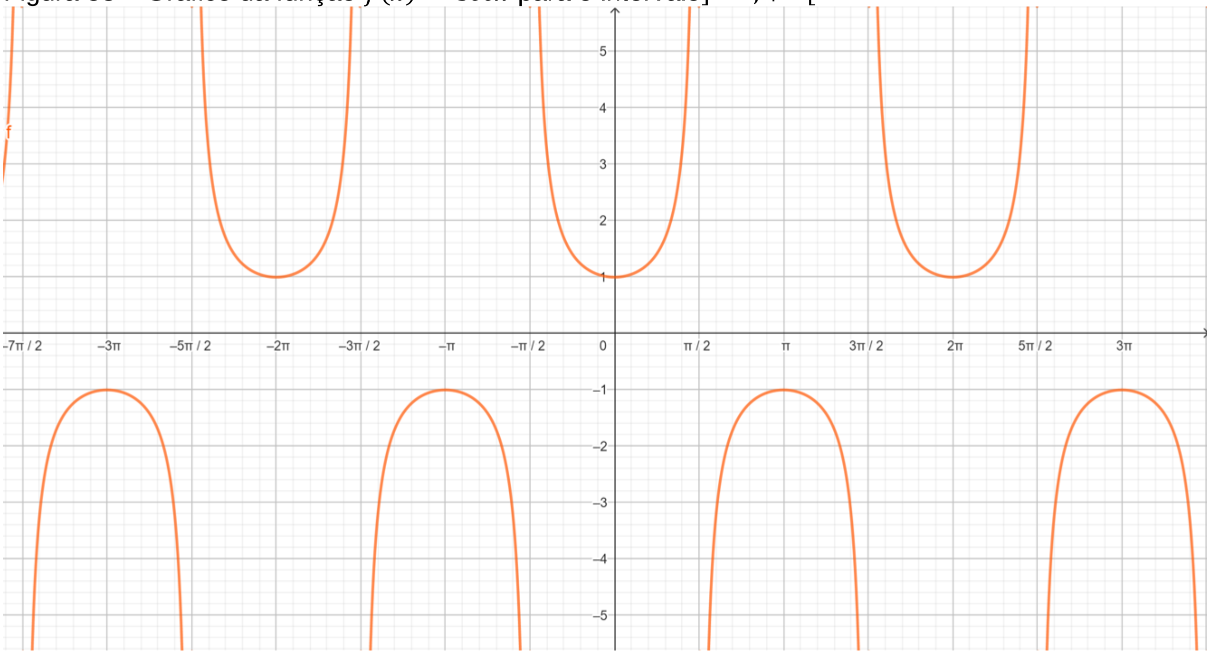
$$P = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}.$$

5.4 FUNÇÃO SECANTE

Definição 5.4 Chamamos de função secante a função f de D em $\mathbb{R}$ que associa a cada $x \in D$ o número $secx$ ou seja, $\begin{cases} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = secx \end{cases}$.

A secante é o inverso do cosseno, $secx = \frac{1}{cosx}$, para $cosx \neq 0$. Dessa forma, o domínio da função é dado por: $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ou $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Figura 58 – Gráfico da função $f(x) = secx$ para o intervalo$]-\infty, +\infty[$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 58, podemos afirmar:

(a) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \mathbb{R}$.

(b) A imagem é dada por: $Im = \mathbb{R} -]-1{,}1[$, ou seja $\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) \leq -1$ ou $f(x) \geq 1$, existe um $x \in \mathbb{R}/f(x) = secx$.

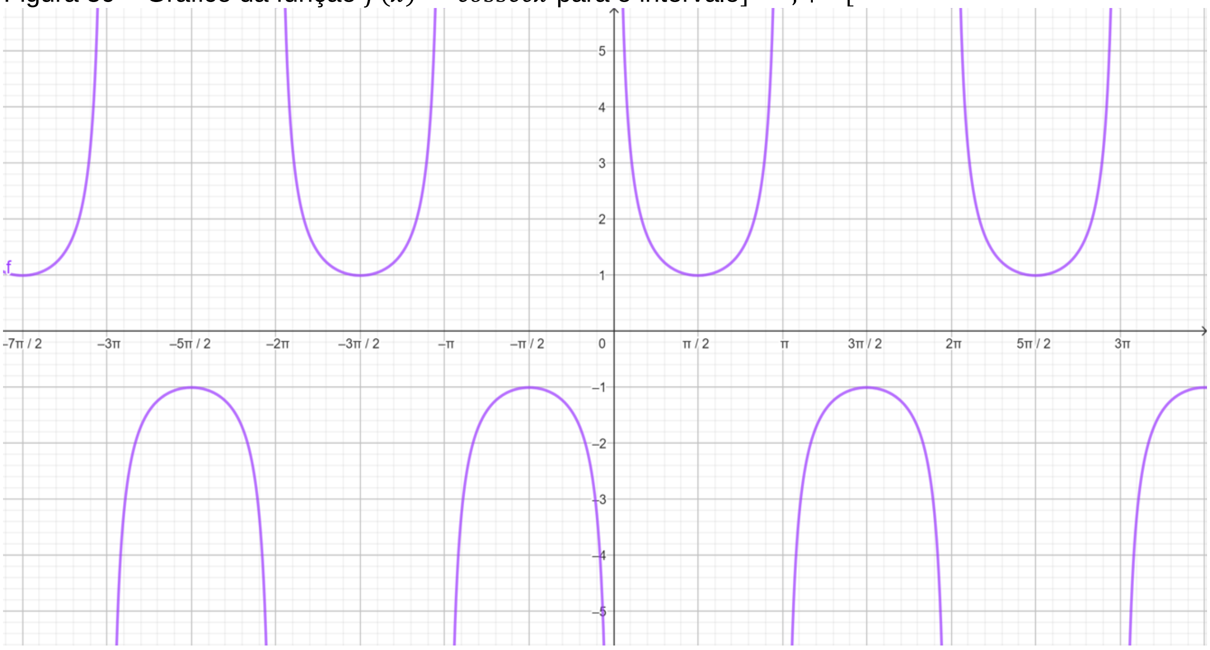
(c) O período da função secante é dado por: $P = 2\pi$, pois a função secante tem o mesmo período da função cosseno.

5.5 FUNÇÃO COSSECANTE

Definição 5.5 Chamamos de função cossecante a função f de D em $\mathbb{R}$ que associa a cada $x \in D$ o número $cossecx$ ou seja, $\begin{cases} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = cossecx \end{cases}$.

A cossecante é o inverso do seno, $cossecx = \frac{1}{senx}$, para $senx \neq 0$. Dessa forma, o domínio da função é dado por: $D = \{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi,\ com\ k \in \mathbb{Z}\}$ ou $D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Figura 59 – Gráfico da função $f(x) = \ cossecx$ para o intervalo$]-\infty, +\infty[$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 59, podemos afirmar:

(a) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \ \mathbb{R}$.

(b) A imagem é dada por: $Im = \mathbb{R} -]-1,1[$, ou seja $\forall\ x\ \in \mathbb{R}, f(x) \leq -1$ ou $f(x) \geq 1$, existe um $x\ \in \mathbb{R}/f(x) = cossecx$.

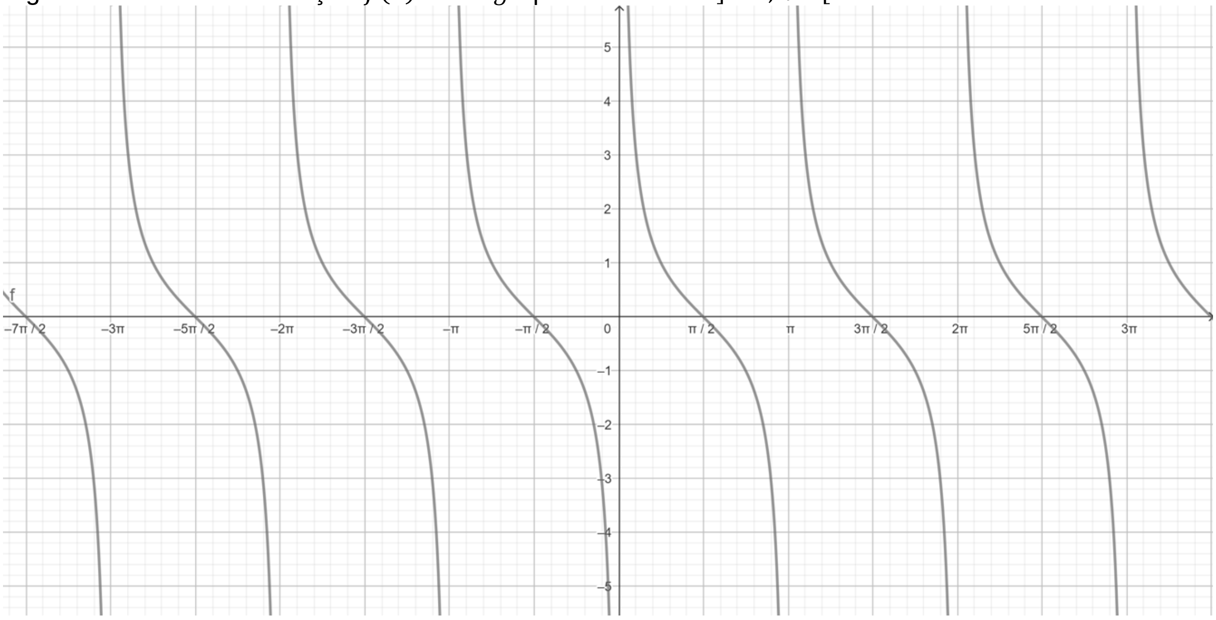
(c) O período da função cossecante é dado por: $P = 2\pi$, pois a função cossecante tem o mesmo período da função seno.

5.6 FUNÇÃO COTANGENTE

Definição 5.6 Chamamos de função cotangente a função f de D em $\mathbb{R}$ que associa a cada $x \in D$ o número $cotgx$ ou seja, $\begin{cases} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = cotgx \end{cases}$.

A cotangente é o inverso da tangente, $cotgx = \frac{1}{tgx} = \frac{cosx}{senx}$, para $senx \neq 0$. Dessa forma, o domínio da função é dado por: $D = \{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi,\ com\, k \in \mathbb{Z}\}$ ou $D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Figura 60 – Gráfico da função $f(x) = \ cotgx$ para o intervalo$]-\infty, +\infty[$



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Em relação ao gráfico, figura 60, podemos afirmar:

(a) O contradomínio é dado por: $CD(f) = \ \mathbb{R}$.

(b) A imagem é dada por: $Im = \mathbb{R}$.

(c) O período da função cotangente é dado por: $P = \pi$, pois a função cotangente tem o mesmo período da função tangente.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(1) Faça o esboço do gráfico das funções em que $x \in [0,2\pi]$ e determine a imagem, período e amplitude em cada caso.

(a) $f(x) = -3senx$

(b) $f(x) = 2 + 3senx$

(c) $f(x) = -1 + 2\cos(x + \pi)$

(d) $f(x) = tg3x$

(2) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2 + 3.cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Assim, em relação à função f, determine:

(a) a imagem;

(b) o período;

(c) a imagem.

(3) A pressão arterial (em mmHg) de um estudante após uma aula de cálculo é dada, em função do tempo em segundo, por: $P(t) = 120 + 20sen(2\pi t)$. Determine a pressão máxima e mínima do estudante após a aula.

(4) Determine o domínio e período de cada uma das funções trigonométricas a seguir.

(a) $f(x) = cotg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(b) $f(x) = \sec(3x + 60^{\circ})$

(c) $f(x) = cossec\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

(1) Encontre o domínio e esboce o gráfico da função $f(x) \begin{cases} x + 2, se\ x < 0 \\ 1 - x, se\ x \geq 0 \end{cases}$.

(2) Uma caixa retangular aberta com volume de 2 m^3 tem uma base quadrada. Expresse a área da superfície da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.

(3) Para medir temperatura são usados graus Celsius (℃) ou graus (℉). Ambos os valores 0℃ e 32℉ representam a temperatura em que a água congela e ambos os valores 100℃ e 212℉ representam a temperatura de fervura da água. Suponha que a relação entre as temperaturas expressas nas duas escalas pode ser representada por uma reta.

(a) Determine a função do primeiro grau $F(C)$ que dá a temperatura em ℉, quando ela é conhecida em ℃.

(b) Esboce o gráfico de $F(C)$.

(c) Qual a temperatura em ℉ correspondente a 25℃?

(d) Existe alguma temperatura que tem o mesmo valor numérico em ℃ e em ℉?

(4) Dadas as funções f(x) = x^2 – 1 e g(x) = 2x – 1:

(a) Determine o domínio e conjunto imagem de f(x) e g(x).

(b) Construa os gráficos de f(x) e g(x).

(5) Construir o gráfico das seguintes funções abaixo.

(a) $y = -2^x$

(b) $\mathrm{f(x) = e^x, (e = 2{,}718 \ldots)}$

(c) $\mathrm{f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x}$

(d) $y = ln(x + 1)$

(6) Uma indústria comercializa um certo produto e tem uma função custo total dada por C(x) = x^2 + 20x + 700, sendo x o número de unidades produzidas. A função receita total é dada por R(x) = 200x. Determine:

(a) O lucro para a venda de 100 unidades.

(b) Em que valor de x acontecerá o lucro máximo?

(7) Traçar o gráfico das funções trigonométricas abaixo.

(a) $f(x) = 1 + senx$

(b) $g(x) = 1 + 2.cosx$

(8) Escreva a função afim $f(x) = ax + b$, sabendo que: $f(1) = 5$ e $f(-3) = -7$.

(9) Considere a função real $f: R \rightarrow R$ definida por: $f(x) = 6x - 3$.

(a) Verifique se a função é crescente ou decrescente

(b) O zero da função;

(c) O ponto onde a função intersecta o eixo y;

(d) O gráfico da função.

(10) O número de bactérias em um meio de cultura cresce aproximadamente segundo a função: $n(t) = 2000.3^{0,04 \cdot t}$ o número de dias após o início do experimento. Calcule:

(a) O número n de bactérias no início do experimento;

(b) Em quantos dias o número inicial de bactérias irá triplicar.

(11) Um botânico, após registrar o crescimento diário de uma planta, verificou que o mesmo se dava de acordo com a função $f(t) = 0,7 + 0,04(3)^{0,14t}$, com t representando o número de dias contados a partir do primeiro registro e f(t) a altura (em cm) da planta no dia t. Nessas condições, é correto afirmar que o tempo necessário para que essa planta atinja a altura de 88,18 centímetros é:

(a) 30 dias. (b) 40 dias. (c) 46 dias. (d) 50 dias. (e) 55 dias.

(12) A pressão p experimentada por um mergulhador debaixo d'água está relacionada com sua profundidade d por meio da fórmula $p = kd + 1$ (k é uma constante). Quando d = 0 metros, a pressão é 1 atmosfera. A 100 metros a pressão é 10,94 atmosferas. Determine a pressão a 50 metros.

(13) A tabela a seguir fornece valores para a função linear $f(x) = ax + b$. Determine a e b.

x	f(x)
2	-1
4	-4
6	-7

(14) Dada a função $f(x) = x^2 - 8x + 7$. Determine:

(a) o gráfico;

(b) o vértice;

(c) o domínio;

(d) a imagem;

(15) Admita que o gráfico da função exponencial $f(x) = k.a^x$ passa pelos dois pontos (1;4,5) e (-1; 0,5). Encontre os valores de a e k.

(16) A meia-vida do fósforo 32 é cerca de 14 dias. Inicialmente há 6,6 gramas presentes.

(17) O que é uma função? Dê exemplos. Como você traça o gráfico de uma função com valores reais cujo domínio e imagem são números reais? O que é uma função crescente? E uma função decrescente?

(18) O que é uma função exponencial? Dê exemplos.

(19) O que é uma função logarítmica? Que propriedades ela satisfaz? O que é uma função logarítmica natural? Qual é o domínio e a imagem de $y = lnx$? Com que seu gráfico se parece?

(20) Numa dada cidade a população atual é de 380.000 habitantes. Se a população apresenta uma taxa de crescimento anual de 1,5%, estime o tempo necessário para a população duplicar. Use um modelo de crescimento exponencial.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretaria da educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo. Editora da Unicamp, 2004.

FLEMMING, Diva Maria; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A.** 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 447p.

GOLDSTEIN, Larry J. et al. **Matemática aplicada**: economia, administração e contabilidade. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

HARIKI, Seiji, **Matemática aplicada**: administração, economia, contabilidade. São Paulo: Saraiva, 2005.

LEITHOLD, Louis, **O cálculo com geometria analítica**. Vol 1. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. p734.

MORETTIN, Pedro A. et al. **Cálculo**: funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, c1987.

STEWART, James. **Cálculo**. vol. 1. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

THOMAS, George B. **Cálculo**. vol 1. 10 ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I: mecânica**. 14 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.